

数学Ⅱ・Bにおける課題学習の研究

愛媛県立今治東中等教育学校 中村 りか
愛媛県立新居浜商業高等学校 松浦 宏明

1 はじめに

2018年3月、文部科学省より「高等学校学習指導要領」が告示され、各科目で取り扱う内容が示された。各科目の学習内容が「知識及び技能」と「思考力・判断力・表現力等」に分けて整理されたことは、新学習指導要領のポイントとしてあげられる。現行課程では数学Ⅰ、数学Aに課題学習が設定されていたが、新課程では、数学Ⅰ、数学Ⅱ、数学Ⅲに設定された。また数学Aにおける数学と人間の活動や数学Bにおける数学と社会生活などの単元では、課題学習に通じるものがあると考えられる。

本年度の研究では、数学Ⅰ・Aにおける課題学習の指導方法の研究は多方面で進んでいるため、新学習指導要領に向けた数学Ⅱ・Bにおける課題学習の内容をまとめたいと思い、この主題を設定した。

2 課題学習について

(1) 課題学習とは

内容またはそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどした課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識させ、学習意欲を含めた数学的に考える資質・能力を高めるようにする学習である。

(2) 取り上げる課題

- ア 生徒の興味・関心や意識を高める課題
- イ 実生活と関連付けた課題
- ウ 生徒の疑問からの課題
- エ 既習事項を発展させた課題

3 単元別課題学習内容

(1) 数学Ⅱにおける題材・具体例

ア 図形と方程式

(ア) テーマ「線形計画法を用いて」

線形計画問題とは、与えられた線形な等式および不等式制約のもとで、線形目的関数を最大化あるいは最小化する問題である。日常生活での例を取り上げて考える。

(イ) テーマ「メネラウスの定理を座標で証明」

メネラウスの定理の証明は、三角形と平行線の性質を用いて簡単に証明される。また、

ベクトルの問題の別解として重宝され、ベクトルでの証明もできるが、座標を利用した証明を考える。

(ウ) テーマ「三角形の傍心の座標」

三角形の五心のうち、数学Aでは、外心、内心、重心を扱うことが中心となり、垂心はその次の扱いとなっている。発展的な内容として傍心の座標について考える。

イ 指数関数・対数関数

(ア) テーマ「複利計算について」

借りた金額と年利を設定し、n年後の総額について考える。この内容は数列の等差数列や等比数列にも触れることができる。

(イ) テーマ「計算尺を用いた指数・対数の計算」

関数電卓が普及するまで計算尺は理数系の世界では必須のアイテムであったとされる。関数電卓とは違ったものを使い、指数や対数の計算を考える。

(ウ) テーマ「電卓を利用して常用対数 $\log_{10} 2$ の近似値を求める」

桁数を求める問題や小数第何位に0以外の数字が表れるかという問題では、必要となる常用対数の値が与えられている。そこで、それらの常用対数の値(近似値)がどのようにして求めることができるか、対数の性質と電卓をうまく用いて考えてみる。

ウ 三角関数

(ア) テーマ「3倍角や4倍角の公式について」

2倍角の公式は加法定理を用いて導くことができる。3倍角の公式は2倍角の公式と加法定理を組み合わせで導かれる。それらを発展させて、4倍角の公式やn倍角の公式についてどう表すことができるのか考える。

(イ) テーマ「三角関数からピタゴラス数を」

$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数の組 (a, b, c) をピタゴラス数という。よく知られているものとして $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ が挙げられる。三角関数の加法定理を利用してその他の自然数解を求めることを考える。

(ウ) テーマ「三角比の真の値について」

教科書の巻末には三角比の表があり、三角比の値が 1° きざみに小数点第4位まで掲載されている。2倍角、3倍角の公式、加法定理などを利用して近似値ではない三角比の真の値を考える。

(2) 数学Bにおける題材・具体例

ア 数列

(ア) テーマ「単利法、複利法、利息について」

指数関数の分野において複利計算をすることもできるが、単利法や複利法から等差数列や等比数列も考えることができる。また、ローン返済の問題に発展させて考える。

(イ) テーマ「フィボナッチ数列と黄金比」

ひまわりの種、オウムガイのうずまきなど自然界ではフィボナッチ数が多く出現する。古代から美しいとされてきた長方形の縦横比について触れ、黄金比とフィボナッチ数列との関係性を考える。

(ウ) テーマ「三角数、四角数について」

三角数、四角数の数の列で n 番目の数がどうなるか考え、一般的にどう表すことができるか考える。また、 n 列目までの和がどう表すことができるのか考える。

(エ) テーマ「パスカルの三角形について」

二項定理を学習する際にパスカルの三角形を学ぶ。 $(a+b)^n$ の展開式における係数が簡単に求められるだけではなく、第 n 段の和がいくらになるか、 n 段のパスカルの三角形の和がいくらになるかなどを数列として考える。

(オ) テーマ「 n 乗数の和の規則性について」

奇数乗和には $n(n+1)$ の因数が、偶数乗和には $n(n+1)(2n+1)$ の因数が出てくることや $n, n+1, 2n+1$ 以外には1次式の因数が存在しないという規則性から、発見的に3乗数の和、4乗数の和などを考え、 n 乗数の和を推定していく。

(カ) テーマ「隣接4項間の漸化式について」

隣接2項間の漸化式は数学Bで取り扱われ、隣接3項間の漸化式は教科書によって発展内容として扱っている場合がある。隣接3項間の漸化式の場合、階差数列をとる、特性方程式を考えるなどのパターンがあり、それを踏まえた上で、隣接4項間の漸化式の一般項がどのようにして求められるか考える。

(キ) テーマ「カレンダーを題材にした数列」

下の図のようにカレンダーをS字の順に進めていくときの数列の一般項を考える。

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

4 実社会で活かされる数学

生徒が身の回りの題材に対し、数学を用いて解決するとともに、面白さと有用性を感じることでできる題材を、上記のテーマから取り上げた。

(1) 図形と方程式

テーマ「線形計画法を用いて」

【問題】

あなたはパティシエ。新作のタルトとゼリーのセット販売を考えた。Aセットは、タルトとゼリーが4個ずつで480円。Bセットは、タルトが2個、ゼリーが6個で600円。ただし、作れる個数には制限があり、1日にタルトは160個、ゼリーは240個。できるだけ儲けを増やすには、商品を何セットずつ準備すればよいか。

複数の条件があり、計算で正確な数値を求めることが難しいとき、グラフを描き、視覚化することでわかりやすくなる。

線形計画問題とは、ある制約された領域の中で、目的となる関数の最大値または最小値を求める問題である。

性質の特徴は

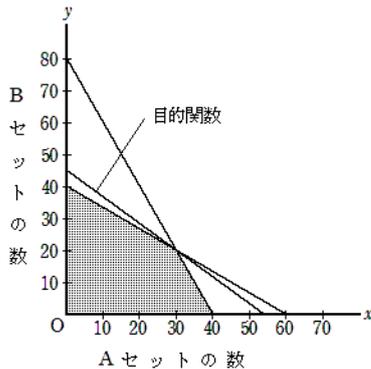
- ・目的関数 z が x, y の一次式である。
 - ・制約領域が、 x と y の一次式もしくは一次不等式の組み合わせで表されている。
- ※変数の数は3つ以上でも構わない。

※変数が多く、計算が複雑になる場合は、ベクトルや行列を使って解くことも多い。

セットの販売情報を式に表す。Aセットを x 個、Bセットを y 個準備し、すべて売り切った場合の利益を z 円とする。1日にタルトは160個、ゼリーは240個までしか作れないことを制限すると、

- $z = 480x + 600y$ ……① (目的関数)
 $4x + 2y \leq 160$ ……② (制約条件)
 $4x + 6y \leq 240$ ……③ (制約条件)
 $x \geq 0$ ……④ (制約条件)
 $y \geq 0$ ……⑤ (制約条件)

②～⑤の表す領域を図示して考えると、



利益

z が最大値をとるのは、 $x = 30$ 、 $y = 20$ のとき、すなわち A セットを 30 個、B セットを 20 個販売したときで、利益は

$$z = 480 \times 30 + 600 \times 20$$

26400 円となる。

(現実にはコストや時間、価格以外にも様々な要素が絡むことに注意すべきである。今回は、セットを売り切ることが前提となっているため、来客数なども考慮に入れなければならない。)

(2) 数列

テーマ「単利法、複利法、利息について」

【問題】

あなたは 100 万円の車を購入した。代金は毎月末均等払いで月利(複利) 2%の半年(6 回払い) ローンで払う。毎月の支払金額はいくらになるか。

日常生活や仕事、特にお金に関係する場面で、数列はよく使われている。利息やローンの計算は、等差数列・等比数列の知識を活用して解くことができる。

まず、100 万円が 6 か月後にはいくらになっているかを考える。毎月の金利は 2%なので、6 か月後の一括返済金は

$$100 \text{ 万} \times (1 + 0.02)^6 \approx 1126162 \text{ (円)}$$

これを毎月一定の金額ずつ返済して、6 か月後に返済できればよいので、逆に考えて、毎月 a 円ずつ金利 2%で 6 か月間積み立てをして、112

万円貯まるとして a 円を求めれば、それが毎月の返済額になる。合計金額を S とすると、

$$S = 1.02a + (1.02)^2a + \dots + (1.02)^6a$$

よく見ると、これは初項 $1.02a$ 、公比 1.02 、項数 6 の等比数列の和である。

$$S = \frac{1.02a\{(1.02)^6 - 1\}}{1.02 - 1}$$

これが、112 万円に等しくなればよいので

$$\frac{1.02a\{(1.02)^6 - 1\}}{1.02 - 1} = 112 \text{ 万}$$

これを解くと、 $a \approx 174067$ となり、毎月 174067 円を返済していけばよいことになる。

ちなみに、

$$174067 \times 6 = 1044402 \text{ (円)}$$

となるので、利息で 44000 円ほど払うことになる。以上のような考え方を一般化すると、元利均等返済の場合、毎月の返済額は以下のような式で計算することができる。

$$\frac{\text{借入金額} \times \text{利率} \times (1 + \text{利率})^{\text{返済回数}}}{(1 + \text{利率})^{\text{返済回数}} - 1}$$

累乗の計算が入るので、少しの金利の違いが長期になればなるほど、大きな違いになることがわかる。

5 研究のまとめ

今回は、数学Ⅱ・Bにおける課題学習のテーマをまとめた。次回は、テーマの指導事例を提案、実践し、効果を検証していきたい。我々大人は、生活や仕事の中に溢れる数学の必要性を痛感する機会に恵まれている。しかし高校生は次々と迫る定期テストや入試をクリアしていくことに必死で、数学を学ぶ意味までを考える余裕がないのが現状である。だからこそ、数学的な見方や考え方のよさを認識させ、考えることの楽しさを感じたり、既知の公式や定理から適切な方法を選択、利用することができたりと、生徒の関心や意欲を高めることのできる問題選びが必要だと考える。課題学習は何のために行うかについて、学習指導要領では「生徒の数学的取り組みを促し、思考力、判断力、表現力等の育成を図る」とある。より多くの生徒が、数学のよさを認識できるようにするために、教師自身の知識や技量もさらに向上していかなければならない。

《参考文献》

- ・「高等学校学習指導要領」(文部科学省)
- ・「高等学校学習指導要領解説」(文部科学省)
- ・「はたらく数学」(篠崎菜穂子著 啓林館)