

興味・関心を抱かせる数学の研究・実践

—課題学習をふまえて—

愛媛県立三瓶高等学校

藤原 治永

1 はじめに

平成27年度より課題研究委員会に所属し、研究を重ねている。本校での課題学習の主な取組は、①各分野・各単元の終わりに応用的な内容の授業を行う。②長期休業中の課題としてレポート（テーマは自由）を課し、提出してきたレポートを評価した後、面白い着眼点や良いレポートを生徒達に紹介する。ただし、②については、生徒たちもネットや書籍から題材を見つけてきてレポートを作成してくるのだが、目を見張るようなレポートにはなかなか出会えない。今年度も数学Ⅰ・Aにこだわらず、数学Ⅱを履修済みの3年生を対象に、数学に対する興味・関心を起こさせ、思考力を高めるような課題研究の実施を試みた。また、導入された電子黒板やタブレットの活用を念頭に入れて実践した。

2 研究・実践内容

(1) ネイピア数について

昨年度、対数を利用したベンフォードの法則から、極限にも足を踏み入れ、ネイピア数 e について考察した。

ある金融機関にお金を預ける。

① 『最初に預ける金額は1』

② 『 $1/n$ 年後に $1/n$ の利息が付く』

上記2つの条件をみたととき、1年(365日換算)後の預金額について、『 n を大きくしていくとどうなるか』を考えさせた。預ける金額を1としたので、少しわかりづらくなってしまったので、

$n=2$ のとき、半年後に $\frac{1}{2}$ の利息が付く。

→半年後の預金額は、1の $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ 倍になる。

→半年後から、さらに半年後の預金額は、
 $\left\{1\text{の}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\text{倍}\right\}$ の $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ 倍になる。

→1年後の預金額は $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$ となる。

同様に、1年後の預金額は $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ となる。

半年ごとに利息が付く $n=2$ の場合を提示することから始めた。

実際に表計算ソフトを使って確かめてみると、確かに2.718281…に近づいていくことが見て取れる。この極限値が e であることを紹介した。数学Ⅲを学習する生徒にも紹介したい。

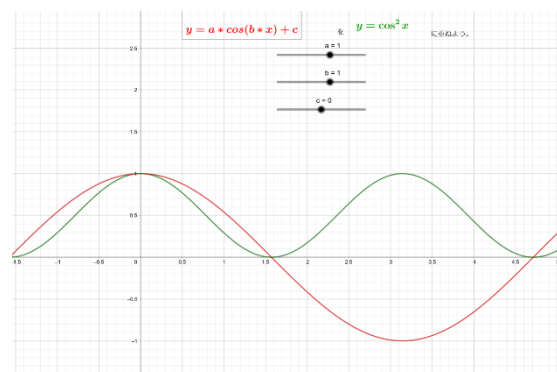
n	利息が付くまで	利息	1年後の利息
1	1年	1	2
2	半年	0.5	2.25
3	4か月	0.333333333	2.37037037
4	3か月	0.25	2.44140625
6	2か月	0.166666667	2.521626372
12	1か月	0.083333333	2.61303529
24	半月	0.041666667	2.663731258
365	1日	0.002739726	2.714567482
730	12時間	0.001369863	2.716422326
1460	6時間	0.000684932	2.717351494
8760	1時間	0.000114155	2.718126692
17520	30分	5.70776E-05	2.718204256
52560	10分	1.90259E-05	2.71825597
105120	5分	9.51294E-06	2.718268899
175200	3分	5.70776E-06	2.718274071
525600	1分	1.90259E-06	2.718279243
1051200	30秒	9.51294E-07	2.718280536
3153600	10秒	3.17098E-07	2.718281398
31536000	1秒	3.17098E-08	2.718281781

(2) 正弦曲線の考察

昨年度に実施した単位分数の和の考え方に関連付けできないかと考えて、課題を設定した。

まず、 $y = \cos x$ のグラフを基に、 $y = \cos^2 x$ のグラフを考えさせた。

次に、GeoGebra Classicを用いて、 $y = \cos^2 x$ のグラフを提示した後、 $y = a \cos(bx) + c$ のグラフを提示、 $y = \cos^2 x$ のグラフと重なるように a, b, c のスライダーを動かして、適切な a, b, c の値を求めさせた。



2倍角の公式を変形して、値を定めることが可能である。また、 $y = \sin^2 x$ のグラフについても同様に行った。こちらは $a = -0.5$ になるので少し難しかったようだ。

また、 $y = \sin^3 x$ についても、同様のアプローチをすると、3倍角の公式から $\sin x$ と $\sin 3x$ を用いて表せることが確認できる。

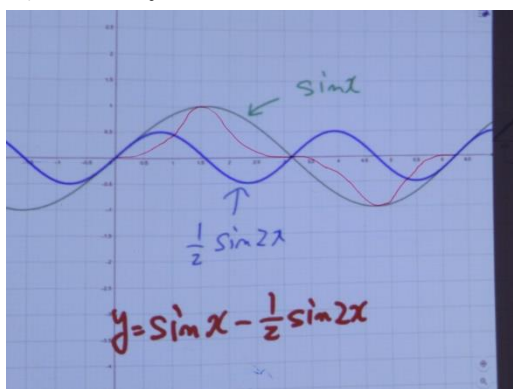
このことをふまえて、次の問題を考えさせた。

$\frac{1}{n} \sin nx$ を n が奇数なら足し、偶数なら引く関数を考える。

例 $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + \frac{1}{9} \sin x - \frac{1}{10} \sin 10x$

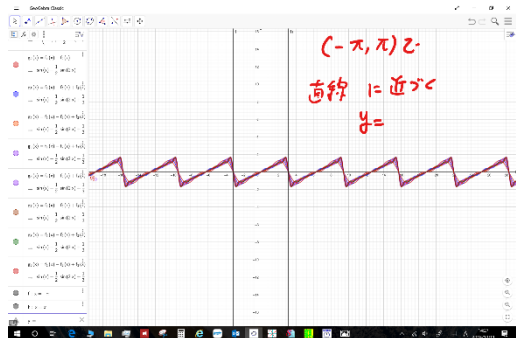
自然数 n を大きくしたとき、この関数のグラフはどのような形に近づくか。

これについても、GeoGebra Classicを用いて、徐々に自分でグラフを描かせてヒントを出しながら考えさせた。



周期関数の和であることから、 $-\pi < x < \pi$ の波形が繰り返し現れていることに気づくことができたので、グラフの作成時間も短縮された。

また、定義域を限定した後、2倍したものを表示すると、直線 $y = x$ に近づくことが予想できた。



次に、教材で各関数を打ち込んでいたことを利用して、矩形波についても同様に出题してみた。

n が奇数のとき、 $\frac{1}{n} \sin nx$ を足していく関数を考える。

例 $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x$

感想を聞くと、矩形波を表せることに驚いていた様子であった。三角関数の足し合わせで(波をたくさん使って)、どんな関数でも表現できることに気づかせることができた。

最後に、「面白い関数を作成してみよう」と促し、実践させてみたが、独創性に富んだ関数は無かったのが残念であった。また、(1)のネイピア数と関連付けて、 e^x や $\sin x$ などのテーラー展開、そしてフーリエ(級数)展開にもつなげていければと考えている。

3 研究のまとめと今後の課題

昨年度に引き続き、教科書は殆ど参照せず、店頭で購入した書籍を参考にして実践した。今回も思考を補助するツールとしてICT機器(電子黒板やタブレット)を用いた。

GeoGebra Classicはダウンロード版とWeb版のアプリがあり、入力する方法を覚えるだけで、グラフがかけるので利用しやすい。もっと複雑な教材作りもできるようにしたい。

この研究を行うことで、生徒たちの主体的な学習を促し、数学に対する興味・関心を高めることができた。また、自分自身も教科書以外の見方や考え方を習得することができた。

課題としては、題材の選定が挙げられる。また、課題を提示し説明することは簡単なのだが、学びが深まる授業展開になるように、提示や展開の工夫が必要である。

今年3月に告示された新学習指導要領では、「数学Ⅱ」および「数学Ⅲ」に課題学習が新設された。生活と関連付けた課題を設け、生徒の疑問を取り上げていくなど、今後も研究を続けていきたい。

《参考文献》

- ・「対数のきほん」 (ニュートンプレス)
- ・「Newton別冊 三角関数」 (ニュートンプレス)