# 中四国の国公立大学入試問題の研究
## － AO・推薦入試の問題から －

愛媛県立新居浜西高等学校　松本　　慎
愛媛県立 北　条 高等学校　砂田　佳範

### １　はじめに

四国地区には，5 つの国立大学，4 つの公立大学が設置されている。中国地方には，5 つの国立大学，11 の公立大学が設置されている。国立大学では，約 23 %，公立大学では，約 32 %の生徒をAO・推薦入試により学生募集を行っており、年々増加傾向にある。私たちが生徒に指導する際，過去問を解かせ，その傾向を見つけることで対策を講じることができると思う。そのため，昨年度に引き続いて，中四国の国公立大学のAO・推薦入試問題で出題された数学の問題を取り上げた。

### ２　平成 30 年度四国の国公立大学 AO・推薦入試問題

**愛媛大学　理学部　AO 入試Ⅱ**

$\boxed{1}$　次の $\boxed{\phantom{ア}}$ に入る数または式を解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　$\cos x+\sin x=\dfrac{6}{5}$ のとき，$\sin 2x=\boxed{ア}$ である。

(2)　関数 $y=xe^{-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ は，$x=\boxed{イ}$ において最大値 $\boxed{ウ}$ をとる。

(3)　$\alpha$ を複素数とする。複素数平面において，点 $z$ が原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動くとき，$w=\alpha(z+2)$ で表される点$w$ が点 $1+\sqrt{3}i$ を中心とする円を描いたとする。このとき，$\alpha=\boxed{エ}$ で，点 $w$ が描く円の半径は $\boxed{オ}$ である。

(4)　和の絶対値が 100 である 2 つの整数 $m$，$n$ $(m\geqq n)$ がある。$m$ を 4 倍すると $n$ より小さくなるとする。このような $n$ は全部で $\boxed{カ}$ 個である。

(5)　座標平面上の $x$ 軸上にある点 P を，次の規則にしたがって動かすとする。

　　さいころを 1 個投げ，出た数を 4 で割った余りが $k$ であるとき，点 P を $x$ 軸の正の方向に $k$ だけ移動する。

最初に P が原点 (0，0) にあるとした場合，さいころを 3 回投げたあと P が点 (7，0) にある確率は $\boxed{キ}$ である。

(6)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}|x|e^{-x}dx=\boxed{ク}$ である。

$\boxed{2}$　次の命題の真偽を判定し，解答用紙に書かれた真または偽のいずれか一方の文字に〇を付けよ。さらに，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(1)　空間の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して、
$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$$
ならば $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直である。

(2)　実数 $\theta$ に対して，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ならば，$\tan\theta\geqq\sin\theta$ である。

(3)　$z$ と $w$ を複素数とするとき，$z^2+w^4=0$ ならば $|z|=|w|$ である。

(4)　異なる素数 $p$，$q$ に対して，$p^2+q^2$ と $pq$ は互いに素である。

$\boxed{3}$　2 以上の自然数 $n$ に対して，$S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ と定める。このとき，
$$\log(1+n)<S_n<1+\log n$$
が成り立つことを示せ。さらに極限値
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\log n}$$
を求めよ。

$\boxed{4}$　$a>1$ を実数とし，$f(x)=(e^x-1)(a-e^{2x})$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸との交点の座標をすべて求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極値をとる $x$ の値を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸とで囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　$a>1$ の範囲で $a$ の値が増加するとき，(3) で求めた $S(a)$ の値も増加することを示せ。

**高知大学　理工学部　数学物理学科（数学分野）推薦入試Ⅰ**

$\boxed{1}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

ある共通した性質をもつ点の集まりがよく知っている曲線になることがある。ここでは，放物線が現れる場合を紹介しよう。

$xy$ 平面において，点 P(0，1) と直線 $\ell$: $y=-1$ をとる。(1) <u>$y=-1$ 上の点 Q($t$，$-1$) に対して，線分 PQ の垂直二等分線の方程式を $t$ を用いて表すことができる。</u>このとき，$t$ にいろいろな値を代入して，その垂直二等分線を $xy$ 平面に描いてみると，垂直二等分線が描かれる場所と描かれない場所があることが分かる。例えば，(2) <u>線分 PQ の垂直二等分線で，点(1，0) を通るものは 2 つあり，点 (0，1) を通るものは存在しない。</u>

また，(3) <u>線分 PQ の垂直二等分線で，点 ($x$，$y$) を通るものがただ 1 つ存在するときには，$x$ と $y$ は関係式 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を満たすことが分かる。</u>言い換えれば，垂直二等分線がただ 1 つ通る点の集まりとして，放物線が現れる。

問 1.　下線部 (1) の線分 PQ の垂直二等分線の方程式を $t$ を用いて表せ。

問 2.　下線部 (2) の理由を説明せよ。

問 3.　点 ($x$，$y$) に対して，線分 PQ の垂直二等分線で，その点を通るものの数は 0，1，2 であるような点の例をそれぞれ 1 つずつ挙げよ。ただし，文章中の点 (1，0)，点 (0，1) を除く。

問 4.　下線部 (3) の理由を説明せよ。

$\boxed{2}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

座標平面上において，点 ($x$，$y$) の 2 つの成分 $x$，$y$ がともに整数のとき，($x$，$y$) を格子点と呼ぶ。すべての整数 $m$，$n$ に対して，格子点 ($m$，$n$) を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円周上には，
($m-2$，$n-1$)，($m-2$，$n+1$)，($m-1$，$n-2$)，
($m-1$，$n+2$)，($m+1$，$n-2$)，($m+1$，$n+2$)，
($m+2$，$n-1$)，($m+2$，$n+1$) の 8 個の格子点が存在する。以

降これら8個の点を$(m, n)$から$\sqrt{5}$離れた格子点と呼ぶことにする。

いま，座標平面上の格子点の上を，次のような規則に従って移動していくことを考えよう。

(i) はじめは$(0, 0)$にいるとする。

(ii) $(0, 0)$から$\sqrt{5}$離れた格子点のうち，好きな点を1つ選んでその点に移動する。

(iii) さらに移動した点から$\sqrt{5}$離れた格子点のうち，好きな点を1つ選んでその点に移動する。

(iv) (iii)を何回も繰り返す。

与えられた規則のもとで，$(0, 0)$から1回の移動で到達できる点は8個ある。また，$(0, 0)\to(-2, 1)\to(-4, 2)$のように移動すれば，$(0, 0)$から2回の移動で$(-4, 2)$に到達できる。$(0, 0)$から2回の移動で到達することができる点は，他にもたくさんある。また，$(0, 0)$から2回以下の移動によって$(1, 0)$に到達することはできないが，例えば，$(0, 0)\to(1, 2)\to(3, 1)\to(1, 0)$のように移動すれば，$(0, 0)$から3回の移動で$(1, 0)$に到達することができる。なお，$(0, 0)$から3回の移動で$(1, 0)$に到達するような移動の仕方は，他にもいろいろ存在する。

いま，$i$，$j$を条件$i^2+j^2>1000$を満たす整数とする。この条件を満たすすべての$i$，$j$に対して，与えられた規則のもとで，$(0, 0)$から14回以下の移動で$(i, j)$に到達することはできない。一方で，移動の回数を14回以下に制限しないとしよう。例えば，$(i, j)=(15, 30)$に対しては，$(0, 0)$から15回の移動で$(i, j)$に到達できる。$(i, j)=(15, 30)$以外の場合はどうだろうか？

問1. $(0, 0)$から1回の移動で到達できる点すべてを座標平面上に図示せよ。

問2. 次の5個の点のうち，$(0, 0)$から2回の移動で到達できるものをすべて選べ。なお，理由を書く必要はなく，答えのみでよい。

$(0, 3)$，$(1, 1)$，$(1, 3)$，$(2, 2)$，$(3, 3)$

問3. $(0, 0)\to(1, 2)\to(3, 1)\to(1, 0)$以外で，$(0, 0)$から3回の移動で$(1, 0)$に到達するような移動の仕方の例を2つ挙げよ。

問4. 文章中の条件を満たす$i$，$j$に対しては，$(0, 0)$から14回以下の移動で$(i, j)$に到達できないことの理由を説明せよ。

問5. 移動の回数を制限しないとする。文章中の条件を満たす$i$，$j$で，$(0, 0)$から移動を繰り返して$(i, j)$に到達できないようなものは存在するか。理由を付けて答えよ。

## 高知大学　医学部医学科　AO入試I　総合問題I

I　次の設問に答えなさい。

設問1　関数$f(x)=8x^3-6x-1$の増減表を書き，$y=f(x)$のグラフの概形を描きなさい。

設問2　$\theta$を実数とする。このとき，加法定理と2倍角の公式を用いて，3倍角の公式$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$を示しなさい。

設問3　3つの実数$\cos\dfrac{\pi}{9}$，$\cos\dfrac{7\pi}{9}$，$\cos\dfrac{13\pi}{9}$は相異なり，設問1の関数$f(x)$に対して，

$f\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right)=f\left(\cos\dfrac{7\pi}{9}\right)=f\left(\cos\dfrac{13\pi}{9}\right)=0$を満たすことを示しなさい。

設問4　$\dfrac{1}{2}<\cos\dfrac{\pi}{9}<1$および$\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}+\cos\dfrac{13\pi}{9}=0$を示しなさい。

II　$xy$平面において，次の3つの直線を考える。ただし，$t$は$1<t<3$を満たす実数とする。

$L_1: x+(t-2)y=t-2$

$L_2: -(t-2)x+y=-(t-2)$

$L_3: x+y=1$

このとき,次の設問に答えなさい。

設問1　直線$L_1$と直線$L_2$の交点Aの座標を求めなさい。

設問2　直線$L_2$と直線$L_3$の交点をB，直線$L_1$と直線$L_3$の交点をCとするとき，三角形ABCの面積$S(t)$を求めなさい。

設問3　三角形ABCの面積$S(t)$が最大値となるような$t$とそのときの$S(t)$の値を求めなさい。

III　$a$，$b$は実数で，$a>0$とする。$xy$平面上において，$(4-a, 1-a)$，$(4-a, 1+a)$，$(4+a, 1-a)$，$(4+a, 1+a)$を頂点とする正方形の4つの辺とその内部からなる領域を$D_1$とし，中心$(b, 2b)$，半径3の円周とその内部からなる領域を$D_2$とする。また，点A，B，Cを$xy$平面上の3点とし，それらの座標をそれぞれ$(2, -2)$，$(2, 1)$，$(3, 0)$とする。このとき，次の設問に答えなさい。

設問1. A，B，Cのうち$D_1$に入る点が1つだけあるような$a$の範囲を求めなさい。

設問2. A，B，Cのうち$D_2$に入る点が2つ以上あるような$b$の範囲を求めなさい。

設問3. A，B，Cのうち$D_1$，$D_2$の両方に入る点が1つ以上あるような$(a, b)$の範囲を$ab$平面上に図示しなさい。

設問4. A，B，Cの3つともそれぞれ$D_1$，$D_2$の少なくとも一方には入るような$(a, b)$の範囲を$ab$平面上に図示しなさい。

## 高知工科大学　経済・マネジメント学群　AO入試

$\boxed{\text{I}}$ 次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1) $302011\cdot 302025-302018^2$を求めよ。

(2) 方程式$ax^2-2x+a=0$が相異なる2つの実数解をもつとき，定数$a$のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 整数を係数とするある1次多項式で，2つの多項式

$P(x)=2x^3+2x^2+x+3$，$Q(x)=x^2+5x-1$

を割ったときの余りが等しくなったとする。このときの余りを求めよ。

(4) 円$x^2-2x+y^2-4y-4=0$上の点$P(x, y)$と点$A(5, 3)$との距離PAの最小値を求めよ。

(5) $\cos\theta=t$とおくとき，$\cos 4\theta$を$t$の多項式で表せ。

(6) 不等式$\log_3(4-x^2)-\log_3(x-1)\leqq 1$を解け。

(7) 方程式$x^3+3x^2-9x+1=a$が相異なる3つの実数解をもつとき，定数$a$のとりうる値の範囲を求めよ。

(8)　定積分 $\int_{-1}^{2}|x^2-x|dx$ の値を求めよ。

(9)　9つの数 0，1，2，3，4，5，6，7，8 から異なる 4 つの数をとって 4 桁の数をつくるとき，何通りの数ができるか。

(10)　男子 2 人，女子 3 人が横一列に並ぶとき、女子が 2 人以上続いて並ぶような並び方は何通りあるか。

(11)　$n$ を自然数とする。$n$ についての方程式
$4^n-(3n+12)2^n+8(3n+4)=0$ の解を求めよ。

(12)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+2^n\ (n\geqq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ。

Ⅱ　点 O を中心とする半径 1 の円に内接する四角形 ABPC があり，次が成り立つとする。

（ⅰ）　三角形 ABC は AB=AC=1 を満たす二等辺三角形である。

（ⅱ）　AP と BC の交点 Q は線分 BC を $m:1-m\ (0<m<1)$ に内分する。

（ⅲ）　直線 AO と円 O の交点のうち，A と異なるものを E とする。E と P は異なる点である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおく。次の各問に答えよ。

(1)　内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$m$ で表せ。

(2)　$\mathrm{AQ}^2$ を $m$ で表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=1$ であることを示せ。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$m$ で表せ。

Ⅲ　$n$ を 2 以上の自然数とする。$n$ 個の正の数 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$ に対し，これらの相加平均と相乗平均とはそれぞれ

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

のことである。これらについて不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\qquad(★)$$

が成り立つ。このことの証明を読み，後の各問に答えよ。

[証明]　(Step 1) $n=2^m\ (m\geqq 1)$ の場合

$m$ に関する数学的帰納法で示す。まず$_{(ア)}$$\underline{m=1 \text{ のとき題意が成り立つ。}}$次に，$m=k\ (k\geqq 1)$ のとき (★) が成り立つとし，$m=k+1$ の場合を考える。このとき，$n'=2^k$ とおくと，$n=2^{k+1}=2n'$ である。

$$A_1=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n'}}{n'},\quad A_2=\frac{a_{n'+1}+a_{n'+2}+\cdots+a_n}{n'}$$

$$G_1=\sqrt[n']{a_1a_2\cdots a_{n'}},\quad G_2=\sqrt[n']{a_{n'+1}a_{n'+2}\cdots a_n}$$

とおくと，数学的帰納法の仮定より

$$A_1\geqq G_1,\ _{(イ)}\underline{A_2\geqq G_2}\qquad(★★)$$

が成り立つ。また

$$A=\frac{A_1+A_2}{2},\quad G=\sqrt{G_1G_2}$$

である。したがって，$m=1$ の場合の結果と (★★) から

$$A=\frac{A_1+A_2}{2}\geqq\sqrt{G_1G_2}=G$$

が成り立つ。以上より，$n=2^m\ (m\geqq 1)$ に対しては (★) は成り立つ。

(Step 2) 一般の場合

$_{(ウ)}$$\underline{2^{m-1}<n\leqq 2^m \text{ となる自然数 } m \text{ がただ1つ存在する。}}$よって，このとき $n=2^m-l\ (0\leqq l<2^{m-1})$ とかける。$l=0$ の場合は Step 1 で示されているから，$l\geqq 1$ としてよい。元の $n$ 個の数に $l$ 個の $A$ を加え，$n+l=2^m$ 個の数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \underbrace{A,\ A,\ \cdots,\ A}_{l\text{個}}$$

を考える。これらの相加平均と相乗平均をそれぞれ $A'$，$G'$ とおくと，$_{(エ)}$$\underline{\text{Step 1 より } A'\geqq G' \text{ である。}}$

一方

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+lA=(n+l)A=2^mA$$

より

$$_{(オ)}\underline{A'=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+lA}{2^m}=A}$$

が成り立つ。また $a_1a_2\cdots a_n=G^n$ より

$$G'=\sqrt[2^m]{a_1a_2\cdots a_nA^l}=\sqrt[2^m]{G^nA^l}$$

が成り立つ。よって

$$A=A'\geqq G'=\sqrt[2^m]{G^nA^l}$$

であるから

$$A^{2^m}\geqq G^{mA^l}$$

が得られる。$_{(カ)}$$\underline{\text{したがって } A\geqq G \text{ が成り立つ。}}$

[設問]

(1)　下線部 (ア) について，その理由を説明せよ。

(2)　下線部 (イ) について，なぜここで数学的帰納法の仮定を用いることができるのかを説明せよ。

(3)　下線部 (ウ) について，$n=1000$ の場合に $m$ を求めよ。

(4)　下線部 (エ) について，なぜ Step 1 の結果を用いることができるのかを説明せよ。

(5)　下線部 (オ) で用いられている考え方を踏まえて，次の問に答えよ。

ある高等学校の 40 人からなるクラスの生徒の身長 $h_1$，$h_2$，…，$h_{40}$ の平均値は $h_0=160$ センチメートルだった。このクラスに，3 人の身長 $h_{41}$，$h_{42}$，$h_{43}$ はいずれも 160 センチメートルだった。このとき，43 人の平均値 $\overline{h}$ に関して，どのようなことが言えるか。数式を用いた詳しい理由も記せ。

(6)　下線部 (カ) について，その理由を説明せよ。

(7)　不等式 (★) が成り立つという命題を $P_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とする。上の [証明] で用いられた考え方に基づけば，$P_1$ が成り立つことを前提として $P_{1000}$ が成り立つことを示すには，どのような手順を踏めばよいか。$P_1$，$P_2$，$P_3$，… のうち必要なものを選び，証明される順に左から右に並べよ。その列は $P_1$ から始まり $P_{1000}$ で終わることとなる。

**香川大学　創造工学部　AO 入試**

[問題 1 ]

下記の文章を読んで設問に答えよ。

下記の比率は黄金比と呼ばれ，構造物の寸法比や絵画の構図などに用いると安定感があり美しいと考えられている。パルテノン神殿，エジプトのピラミッド，ミロのヴィーナスなどの歴史的建造物や彫刻にこれと同じか近い数の比が隠されていることは有名

である。また，巻貝の螺旋の拡大比など生物にも見出すことができる。

$$1:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

簡単な図形の中に現れる黄金比には，下記のようなものがある。

Ⅰ：正五角形の１辺と対角線の長さの比

Ⅱ：点 A，B，C が直線状にこの順で並んでいるとき線分 AB を点 C で外分，線分 CA を点 B で内分するときの外分比 AC:CB と内分比 CB:BA が等しくなるときのその比

Ⅲ：長方形から短辺を１辺とする正方形を片側から除いた後残る長方形の縦横比が元の長方形の縦横比と等しくなるときのその縦横比

問１　Ⅱ のように線分の外分比と内分比が等しくなる時，その比が黄金比になることを説明せよ。説明には，図や数式を引用しても良い。文字数は自由とする。ただし，欄内に簡潔に記載すること。

問２　Ⅲ のような長方形において縦横比が黄金比となることを説明せよ。説明には，図や数式を引用しても良い。文字数は自由とする。ただし，欄内に簡潔に記載すること。

[問題２]

下記の文章を読んで設問に答えよ。

正五角形の１辺と対角線の長さの比が黄金比になることを知っていると目盛りのない直定規とコンパスだけを用いて正五角形を作図することができる。図１は，その作図の様子を示している。図の左側が予備作図，右側が本作図である。予備作図において，適当な長さの線分を長さ１とし，その $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 倍の長さの線分を得ている。本作図では，予備作図で得られた１の長さと $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ の長さを用いて３つの三角形を組み合わせて作図することで正五角形を作図している。点線の直線は直定規で引いた下書き線，円弧はコンパスで描いた下書き線である。ただし，円弧は円弧であることが分かるように誇張してあり，半径は実際と異なる。丸点は，コンパスを用いたときの中心を示す。

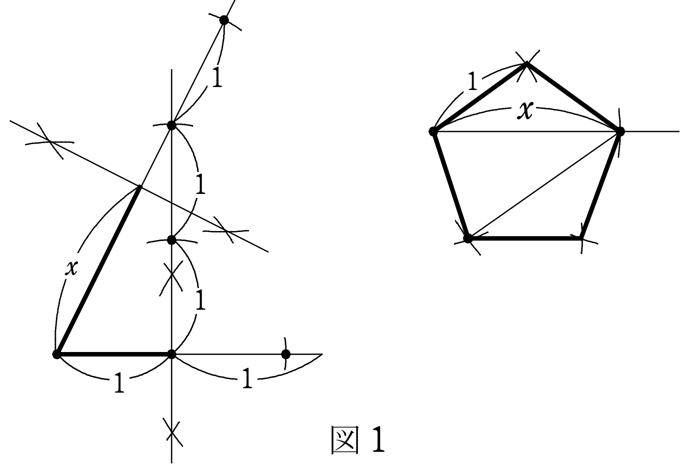


図１

問１　予備作図によって $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ の長さを得る方法を，図の引用をせず，箇条書きを用いずに文章で説明せよ。ただし，説明する相手は三平方の定理，垂直二等分線の作図法についての知識があり，それらの作図法を詳細に説明する必要はない。また，説明の過程で線分や図形に名前を付すことは差し支えない。文字数は自由とする。ただし，欄内に簡潔に記載すること。

問２　本作図によって正五角形を得る方法を，図の引用をせず，箇条書きを用いずに文章で説明せよ。ただし，説明する相手は３辺の長さからの三角形の作図法の知識があり，それらの作図法を詳細に説明する必要はない。また，説明の過程で線分や図形に名前を付すことは差し支えない。文字数は自由とする。ただし，欄内に簡潔に記載すること。

## ３　まとめ

平成 30 年度の四国地方の AO 入試と推薦入試の問題の中で，数学の内容に関するものを取り上げた。平成 29 年度の問題と比較してみると，高知大学教育学部が講義等理解力検査に変更しており，数学的な内容ではなくなっていた。また，香川大学創造工学部が小論文の中に数学的な内容が追加されていた。愛媛大学の理学部は例年通り教科書の基本的な内容を問う問題が多かったが，$\boxed{1}$ が昨年度と全く同じ問題であった。高知大学は、理学部は問題文で数学的な内容を説明して問題を解かせるような読解力を問う問題で，医学部医学科は総合問題Ⅰに数学と理科の問題を出題していた。高知工科大学の経済•マネジメント学群は，小問集合と大問，読解力を問う問題と幅広く出題していた。香川大学の創造工学部は，小論文で数学と理科の内容が１題ずつあり，数学は黄金比について文章を読ませ，作図を説明させる問題であった。香川大学は工学部から創造工学部に変更したタイミングで，小論文の内容も変更したようである。例年出題している大学は，出題傾向は昨年度と大きく変わるところはなく，過去問を利用して指導をしていく必要性を改めて感じた。また，昨年度と同様に小論文の問題でも，グラフや表から読み取らせて分析させる問題を出題している大学がいくつかあり，様々な場面で数学的な見方や考え方が必要とされているのを感じた。