国公立大学入試問題の研究

－複素数平面について－

愛媛県立松山東高等学校　　松　浦　　　正

1　はじめに

私が数学Ⅲの指導をする中で感じることの１つは，複素数平面の単元を苦手とする生徒が多いことである。複素数の計算は，数学Ⅱで学習済みではあるが，数学Ⅲで扱う計算は，基本形 $a+bi$ 以外にも，ド・モアブルの定理を用いた極形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の変形など，煩雑なものが多いため，計算力自体がなかなか定着しづらい側面もある。さらには，数としての計算の意味を平面上における点や図形の回転移動に結び付けていく必要があるため，生徒たちも理解に苦しんでいるような印象を受ける。こういった現状において，大学入試問題で求められている力が何かを考察し，今後の指導に役立てていきたいと思い，この研究テーマを設定した。

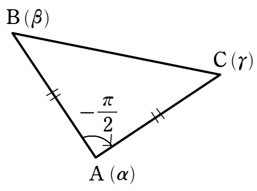
本研究は，２０１８年の大学入試問題で出題された複素数平面の問題を取り上げ，それぞれの解法パターンを分析していく。

２　大学入試問題の分析

◎ 複素数平面上の図形問題

＜２０１８　福島大学　＞
異なる３つの複素数 α，β，γ が $\gamma+i\beta=\alpha(1+i)$ を満たすとする。
α，β，γ を表す複素数平面上の点を A，B，C とするとき，△ABC はどのような形か答えよ。

【解法の分析】
$\gamma+i\beta=\alpha(1+i)$ から，　$\gamma-\alpha=-i(\beta-\alpha)$
よって，$\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(\beta-\alpha)$
ゆえに，点 C(γ) は，点 B(β) を点 A(α) を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

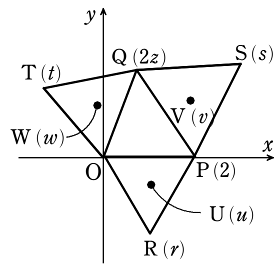


したがって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$，AB＝AC の直角二等辺三角形である。

＜２０１８　北海道大学　＞
z を虚部が正である複素数とし，O(0)，P(2)，Q$(2z)$ を複素数平面上の３点とする。
△OPR，△PQS，△QOT は △OPQ の内部と重ならない正三角形とし，３点 U，V，W をそれぞれ △OPR，△PQS，△QOT の重心とする。
(1)　３点 U，V，W が表す複素数をそれぞれ z で表せ。
(2)　△UVW は正三角形であることを示せ。

【解法の分析】
R(r)，S(s)，T(t)，U(u)，V(v)，W(w) とおく。
(1)　点 R は，点 P を原点を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。よって，

$$r=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 2$$
$$=1-\sqrt{3}\,i$$



点 S は，点 Q を点 P を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

よって，　$s-2=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(2z-2)$

ゆえに，$s-2=(1-\sqrt{3}\,i)z-1+\sqrt{3}\,i$ であるから，
$s=(1-\sqrt{3}\,i)z+1+\sqrt{3}\,i$

点 T は，点 Q を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。よって　$t=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2z=(1+\sqrt{3}\,i)z$

点 U は △OPR の重心であるから，
$$u=\frac{0+2+r}{3}=\frac{1}{3}(3-\sqrt{3}\,i)$$
点 V は △PQS の重心であるから，
$$v=\frac{2+2z+s}{3}=\frac{1}{3}\{(3-\sqrt{3}\,i)z+3+\sqrt{3}\,i\}$$
点 W は △QOT の重心であるから，
$$w=\frac{2z+0+t}{3}=\frac{1}{3}(3+\sqrt{3}\,i)z$$

(2)　点 W を点 U を中心として，$-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を A(α) とすると，△UAW は正三角形である。

また，$\alpha-u=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(w-u)$

したがって，
$$\alpha=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(w-u)+u$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left\{\frac{1}{3}(3+\sqrt{3}\,i)z-\frac{1}{3}(3-\sqrt{3}\,i)\right\}+\frac{1}{3}(3-\sqrt{3}\,i)$$
$$=\frac{1}{6}(1-\sqrt{3}\,i)\{(3+\sqrt{3}\,i)z-(3-\sqrt{3}\,i)\}+\frac{1}{3}(3-\sqrt{3}\,i)$$

展開して整理すると，　$\alpha=\frac{1}{3}\{(3-\sqrt{3}\,i)z+3+\sqrt{3}\,i\}$

よって，(1) から，点 A と点 V は一致する。
ゆえに，△UVW は正三角形である。

＜２０１８　広島大学　＞

複素数平面上の 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) を頂点とする四角形 ABCDを考える。ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が 180° より小さい四角形(凸四角形) であるとする。また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A，B，C，D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB，BC，CD，DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB，BQC，CRD，DSA を作る。

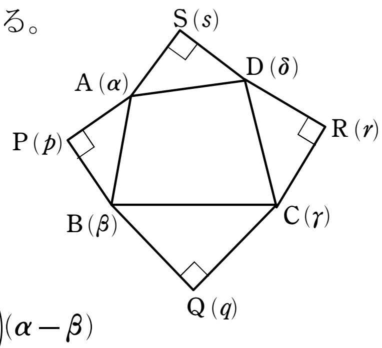
(1)　点 P を表す複素数を求めよ。

(2)　四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3)　四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ。

【解法の分析】

P(p)，Q(q)，R(r)，S(s) とする。



(1)　点 P は，点 A を点 B を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，B との距離を $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点である。したがって，

$$p-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\alpha-\beta)$$

$$p=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta)+\beta \qquad \text{ゆえに，}\ p=\frac{1+i}{2}\alpha+\frac{1-i}{2}\beta$$

(2)　(1) と同様に考えると，

$$q=\frac{1+i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma,\qquad r=\frac{1+i}{2}\gamma+\frac{1-i}{2}\delta,$$

$$s=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha$$

したがって，

四角形 PQRS が平行四辺形

$\iff p-q=s-r$

$\iff \left(\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta\right)-\left(\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma\right)=\left(\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha\right)-\left(\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta\right)$

$\iff 2i\alpha-2i\beta=2i\delta-2i\gamma$

$\iff \alpha-\beta=\delta-\gamma$

$\iff$ 四角形 ABCD が平行四辺形

よって，四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD が平行四辺形であることである。

(3)　四角形 PQRS が平行四辺形であるとき，(2) から，

$\alpha-\beta=\delta-\gamma$　すなわち，　$\delta=\alpha-\beta+\gamma$　…… ①

ここで，(2) の計算から，

$$p-q=\frac{1}{2}\{(1+i)\alpha-2i\beta-(1-i)\gamma\} \quad \cdots\cdots ②$$

また，

$$r-q=\left(\frac{1+i}{2}\gamma+\frac{1-i}{2}\delta\right)-\left(\frac{1+i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma\right)=\frac{1}{2}\{2i\gamma+(1-i)\delta-(1+i)\beta\}$$

したがって，① から，

$$r-q=\frac{1}{2}\{2i\gamma+(1-i)(\alpha-\beta+\gamma)-(1+i)\beta\}=\frac{1}{2}\{(-i+1)\alpha-2\beta+(i+1)\gamma\} \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ から　　$p-q=(r-q)i$　…… ④

よって，$|p-q|=|(r-q)i|$ であるから，$|p-q|=|r-q|$

すなわち，　QP＝QR　…… ⑤

また，$r\neq q$ であるから，④ より，$\dfrac{p-q}{r-q}=i$

ゆえに，$\dfrac{p-q}{r-q}$ は純虚数であるから，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$　…… ⑥

⑤，⑥ から，四角形 PQRS が平行四辺形ならば，四角形 PQRS は正方形である。

◎ 方程式の解に関する問題

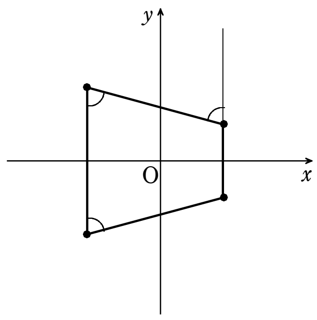
＜２０１８　東京工業大＞
a，b，c を実数とし，3 つの 2 次方程式
$x^2+ax+1=0$ ……①
$x^2+bx+2=0$ ……②
の解を複素数平面上で考察する。
2 つの方程式 ①，② がいずれも実数解をもたないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ。

【解法の分析】
$\boxed{\text{方針}}$ 2 次方程式の実数解に関する条件を利用して解く。
①，② がいずれも実数解をもたないとき，

① の解は　$x=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$ ……④

② の解は　$x=-\dfrac{b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{8-b^2}}{2}i$ ……⑤

④ の 2 つの解，⑤ の 2 つの解はそれぞれ互いに共役である。
よって，④ を表す 2 つの点，⑤ を表す 2 つの点はそれぞれ実軸に関して対称である。
$a=b$ のとき，④，⑤ の表す 4 つの点は，点 $-\dfrac{a}{2}$ を通り実軸に垂直な直線上にある。
$a\neq b$ のとき，④，⑤ の表す 4 つの点を結ぶと等脚台形ができる。



等脚台形は，1 つの内角がその対角の外角に等しいから，円に内接する。
よって，①，② の解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にある。

※ 解がすべて同一円周上にあるとき，円の中心は，④ の表す 2 つの点を結んだ線分の垂直二等分線上，すなわち実軸上にある。

◎ 複素数平面上の集合問題

＜２０１８　信州大学　＞
M は有限個の複素数からなる集合で，
(a)　$1\in M$，$0\notin M$
(b)　z，$w\in M$ ならば $zw\in M$
を満たすとする。$\alpha\in M$ とするとき，次の問いに答えよ。
(1)　$\alpha^n=1$ となる自然数 n が存在することを示せ。
(2)　m を $\alpha^m=1$ を満たす自然数のうち最小のものとする。
このとき，$\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}\in M$ であることを示せ。

【解法の分析】
(1)　$\alpha\in M$ であるから，条件 (b) より　$\alpha\alpha\in M$
すなわち，　$\alpha^2\in M$
よって，条件 (b) より，　$\alpha\alpha^2\in M$
すなわち　$\alpha^3\in M$
同様に考えていくと，すべての自然数 j に対して
$\alpha^j\in M$ ……①
$\alpha^j\,(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が j の値によってすべて異なるとすると，M が有限個の複素数からなる集合であることに矛盾する。
よって，$\alpha^k=\alpha^l$ ……② となる異なる自然数 k，l が存在する。$k>l$ としても一般性を失わないから，$k>l$ の場合を考える。
条件 (a) の $0\notin M$ より，$\alpha\neq 0$ であるから，② の両辺に α^{-l} を掛けると，　$\alpha^{k-l}=1$
k，l は自然数で，$k>l$ であるから，$k-l$ は自然数である。したがって，$\alpha^n=1$ となる自然数 n が存在する。

(2)　$\beta=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$ とおくと

$\beta^m=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$
よって，β は 1 の m 乗根の 1 つである。
また，$\alpha^m=1$ であるから，1，α，α^2，……，α^{m-1} をそれぞれ m 乗すると，すべて 1 になる。
ゆえに，1，α，α^2，……，α^{m-1} はすべて 1 の m 乗根である。
一方，1，α，α^2，……，α^{m-1} の中に等しいものが存在するとすると，$\alpha^k=\alpha^l$，$k>l$，$0\leqq k\leqq m-1$，$0\leqq l\leqq m-1$ を満たす整数 k，l が存在する。
このとき，$\alpha^{k-l}=1$，$0<k-l<m$
これは m が $\alpha^m=1$ を満たす自然数のうち最小のものであることに矛盾する。よって，1，α，α^2，……，α^{m-1} はすべて互いに異なる複素数である。1 の m 乗根は m 個あるから，1，α，α^2，……，α^{m-1} ですべてである。β は 1 の m 乗根であるから，β は 1，α，α^2，……，α^{m-1} のいずれかと一致する。したがって，$1\in M$ と ① より，$\beta\in M$
すなわち，$\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}\in M$

◎ n 乗根の問題

＜２０１８　鳥取大学　＞

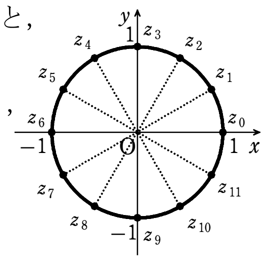
$z^{12}=1$ を満たす複素数は全部で 12 個あり，それらを z_0，z_1，……，z_{11} とする。

(1)　$z^{12}=1$ を満たす 12 個の複素数をすべて求めよ。

(2)　和 $z_0+z_1+\cdots\cdots+z_{11}$ の値を求めよ。

(3)　積 $z_0z_1\cdots\cdots z_{11}$ の値を求めよ。

【解法の分析】…対称性を利用した解法



(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …… ①　とすると，

$z^{12}=r^{12}(\cos 12\theta+i\sin 12\theta)$

$1=\cos 0+i\sin 0$ であるから，$z^{12}=1$ より，

$r^{12}(\cos 12\theta+i\sin 12\theta)=\cos 0+i\sin 0$

両辺の絶対値と偏角を比較すると，

$r^{12}=1$，$12\theta=0+2k\pi$　(k は整数)

$r>0$ であるから，$r=1$　　　また，$\theta=\dfrac{k\pi}{6}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0$，1，……，11 である。

よって，求める解は

$1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ i,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,$

$-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -i,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(2)　(1) の結果から，z_0，z_1，……，z_{11} を次のようにおける。

$z_0=1,\ z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,$

$z_3=i,\ z_4=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_5=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,$

$z_6=-1,\ z_7=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ z_8=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,$

$z_9=-i,\ z_{10}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_{11}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

よって，$z_0=-z_6$，$z_1=-z_7$，$z_2=-z_8$，$z_3=-z_9$，

$z_4=-z_{10}$，$z_5=-z_{11}$

ゆえに　$z_0+z_1+\cdots\cdots+z_{11}=0$

(3)　(2) より，$\overline{z_1}=z_{11}$，$\overline{z_2}=z_{10}$，$\overline{z_3}=z_9$，$\overline{z_4}=z_8$，$\overline{z_5}=z_7$

よって，　$z_1z_{11}=|z_1|^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

同様にして，　$z_2z_{10}=1$，$z_3z_9=1$，$z_4z_8=1$，$z_5z_7=1$

よって，　$z_0z_1\cdots\cdots z_{11}=z_0\cdot z_1z_{11}\cdot z_2z_{10}\cdot z_3z_9\cdot z_4z_8\cdot z_5z_7\cdot z_6$

$=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)=-1$

＜２０１８　東京学芸大学　＞

2 つの整式 $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，$G(x)=x^3-x^2-x+1$ に対し，$F(x)$ を $G(x)$ で割った余りを $R_1(x)$，$G(x)$ を $R_1(x)$ で割った余りを $R_2(x)$ とする。

(1)　$R_1(x)$，$R_2(x)$ を求めよ。

(2)　$\alpha=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ とするとき，

$G(\alpha)(p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s)=1$ を満たす有理数の組 p，q，r，s を 1 組求めよ。

【解法の分析】

(1)　$F(x)=G(x)\cdot(x+2)+4x^2+2x-1$，

$G(x)=(4x^2+2x-1)\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{8}\right)+\dfrac{5}{8}$ であるから，

$R_1(x)=4x^2+2x-1$，　$R_2(x)=\dfrac{5}{8}$

(2)　ド・モアブルの定理から，

$\alpha^5=\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 1$ であるから，$F(\alpha)=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

(1) から，　$F(\alpha)=G(\alpha)\cdot(\alpha+2)+R_1(\alpha)=0$

$\alpha\neq\dfrac{3}{2}$ であるから，

$G(\alpha)\cdot(\alpha+2)\left(\dfrac{1}{4}\alpha-\dfrac{3}{8}\right)+R_1(\alpha)\left(\dfrac{1}{4}\alpha-\dfrac{3}{8}\right)=0$

$R_1(\alpha)\left(\dfrac{1}{4}\alpha-\dfrac{3}{8}\right)=G(\alpha)-\dfrac{5}{8}$ であるから，

$G(\alpha)\cdot\dfrac{8}{5}\left\{(\alpha+2)\left(\dfrac{1}{4}\alpha-\dfrac{3}{8}\right)+1\right\}=1$

ゆえに，　$G(\alpha)\left(\dfrac{2}{5}\alpha^2+\dfrac{1}{5}\alpha+\dfrac{2}{5}\right)=1$

よって，求める p，q，r，s の組は，

$p=0$，　$q=\dfrac{2}{5}$，　$r=\dfrac{1}{5}$，　$s=\dfrac{2}{5}$

◎ 複素数平面上の軌跡と領域の問題

＜２０１８　愛媛大＞

i を虚数単位とし，h を実数とする。複素数平面において，点 z が 4 点 0，1，$1+i$，i を頂点とする四角形の周を動くとき，$w=(-2+2i)z+hi$ が表す点の描く線で囲まれた図形を D_h とする。

(1)　$-2+2i$ の絶対値と偏角を求めよ。
　ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。

(2)　D_0 の概形を描け。

(3)　複素数平面における図形 A を
　$A=\{x+yi \mid x,\ y$ は実数，$-5\leqq x\leqq 5,\ 4\leqq y\leqq 6\}$
　と定義し，A と D_h の共通部分の面積を $S(h)$ とする。
　ただし，共通部分がない場合や，共通部分が線分や点の場合は，$S(h)=0$ とする。$S(h)$ の最大値とそのときの h の値を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって，$-2+2i$ の絶対値は $2\sqrt{2}$，偏角は $\dfrac{3}{4}\pi$

(2)　$h=0$ のとき，$w=(-2+2i)z$

ゆえに，(1) から，$w=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)z$

したがって，点 w は，点 z を原点を中心として $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を $2\sqrt{2}$ 倍した点である。

点 z の軌跡は図 [1] のようになる。

D_0 は，この軌跡上の各点を，原点を中心として $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を $2\sqrt{2}$ 倍してできる正方形である。

よって，D_0 は図 [2] の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。

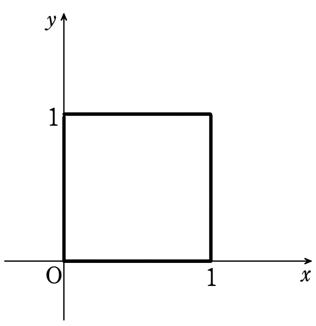


図 [1]

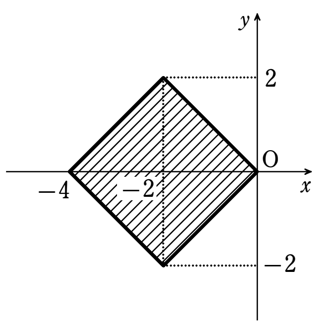
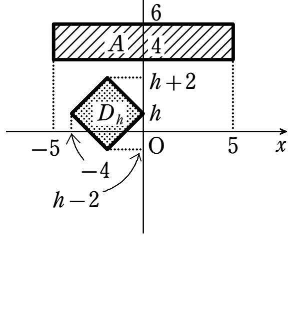


図 [2]

(3)　図形 A は右の図の斜線部分のようになる。

D_h は，D_0 を虚軸方向に h だけ平行移動した図形である。



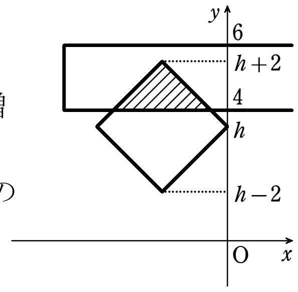
[1]　$h+2<4$　すなわち　$h<2$ のとき

A と D_h の共通部分はないから，

$S(h)=0$

[2]　$4\leqq h+2\leqq 6$　すなわち　$2\leqq h\leqq 4$ のとき

A と D_h の共通部分は，右の図の斜線部分のようになる。



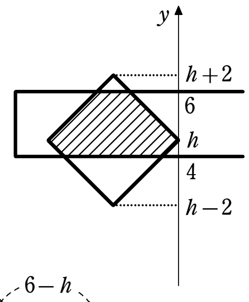
$2\leqq h\leqq 4$ において，$S(h)$ は単調に増加するから，$S(h)$ の最大値は，$S(4)$

$S(4)$ は 1 辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正方形の面積の半分であるから，

$S(4)=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2=4$

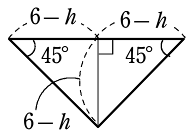
[3]　$6<h+2<8$　すなわち　$4<h<6$ のとき

A と D_h の共通部分は，右の図の斜線部分のようになる。



D_h から，右の図の斜線部分を除くと，2 つの直角二等辺三角形ができる。下側にある直角二等辺三角形の高さは，

$4-(h-2)=6-h$



底辺の長さは，$2(6-h)$

よって，その面積は，

$\dfrac{1}{2}(6-h)\cdot 2(6-h)=(6-h)^2$

同様に考えると，上側にある直角二等辺三角形の面積は，

$\dfrac{1}{2}(h-4)\cdot 2(h-4)=(h-4)^2$

ゆえに，$S(h)$ は 1 辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正方形の面積から $(6-h)^2+(h-4)^2$ を引いたもので，

$S(h)=(2\sqrt{2})^2-\{(6-h)^2+(h-4)^2\}$
$\quad=-2h^2+20h-44=-2(h-5)^2+6$

よって，$4<h<6$ において，$S(h)$ は $h=5$ で最大値 6 をとる。

[4]　$8\leqq h+2\leqq 10$　すなわち　$6\leqq h\leqq 8$ のとき

[2] と同様に考えると，$6\leqq h\leqq 8$ において，$S(h)$ は単調に減少するから，$S(h)$ の最大値は，$S(6)$

また，$S(6)=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2=4$

[5]　$10<h+2$　すなわち　$h>8$ のとき

A と D_h の共通部分はないから，　$S(h)=0$

[1]〜[5] から，$S(h)$ は $h=5$ で最大値 6 をとる。

＜２０１８　静岡大＞

$z \fallingdotseq 1$ である複素数 z に対して，$w=\dfrac{z+1}{1-z}$ とする。

点 z が複素数平面の虚軸上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2)　$|w+i+1|$ の最大値と最小値を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$w=\dfrac{z+1}{1-z}$ から，　$w(1-z)=z+1$

すなわち，　$(w+1)z=w-1$　…… ①

$w=-1$ とすると，(① の左辺)$=0$，(① の右辺)$=-2$ となり，矛盾する。　よって　　$w \fallingdotseq -1$　…… ②

したがって，$w+1 \fallingdotseq 0$ であるから，① の両辺を $w+1$ で割ると，　$z=\dfrac{w-1}{w+1}$

z は虚軸上にあるから，　$z+\overline{z}=0$

ゆえに，$\dfrac{w-1}{w+1}+\overline{\left(\dfrac{w-1}{w+1}\right)}=0$ であるから，

$$\frac{w-1}{w+1}+\frac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}=0$$

両辺に $(w+1)(\overline{w}+1)$ を掛けると

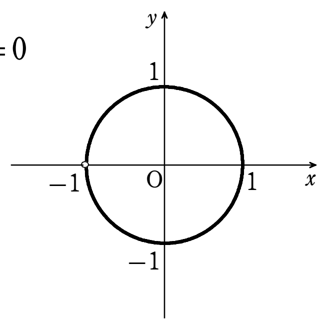
$(w-1)(\overline{w}+1)+(\overline{w}-1)(w+1)=0$

$2w\overline{w}-2=0$

$|w|^2=1$

よって，　$|w|=1$

これと ② から，w が描く図形を複素数平面上に図示すると，右の図のようになる。



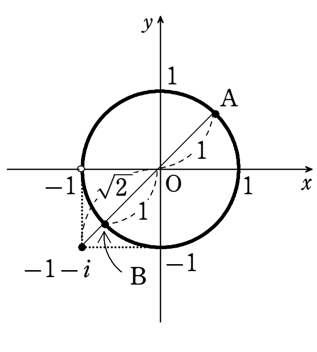
(2)　$|w+i+1|=|w-(-1-i)|$ であるから，

$|w+i+1|$ は，点 w と点 $-1-i$ の距離に等しい。

また，　$|-1-i|=\sqrt{2}$

$|w+i+1|$ が最大となるのは，w が右の図において A の位置にあるときであるから，求める最大値は，$\sqrt{2}+1$

$|w+i+1|$ が最小となるのは，w が右の図において B の位置にあるときであるから，求める最小値は，$\sqrt{2}-1$



参考　$|w+i+1|$ が最大となるとき　　$w=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

　　　$|w+i+1|$ が最小となるとき　　$w=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

＜２０１８　名古屋工業大＞

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たす複素数 z の値を求めよ。

　また，このとき $\alpha=z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ の値を求めよ。

(2)　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は，どのような図形を表すか。

(3)　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる複素数 z と，

　$\left|w-\left(\dfrac{8}{3}+2i\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ を満たす複素数 w について，

$|z-w|$ の最小値を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ の両辺に z を掛けて整理すると，

$z^2-\sqrt{3}z+1=0$

よって，$z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$　(これは $z \fallingdotseq 0$ を満たす)

ゆえに，$z=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)$ (複号同順) であるから，$\alpha=z^{100}+z^{-100}$

$$=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{100}+\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{-100}$$

$$=\left\{\cos\left(\pm\frac{50}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{50}{3}\pi\right)\right\}+\left\{\cos\left(\mp\frac{50}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\frac{50}{3}\pi\right)\right\}$$

$$=\left(\cos\frac{50}{3}\pi\pm i\sin\frac{50}{3}\pi\right)+\left(\cos\frac{50}{3}\pi\mp i\sin\frac{50}{3}\pi\right)$$

$$=2\cos\frac{50}{3}\pi=2\cos\frac{2}{3}\pi=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

(すべて複号同順)

(2)　$z \fallingdotseq 0$ のとき，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるとすると，

$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z+\dfrac{1}{z}}$　　すなわち，　$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$

両辺に $z\overline{z}$ $(=|z|^2)$ を掛けると，　$z|z|^2+\overline{z}=\overline{z}|z|^2+z$

よって，　$|z|^2(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

したがって，　$z-\overline{z}=0$ または $|z|^2-1=0$

すなわち，　$z=\overline{z}$ または $|z|=1$

ゆえに，　z は実数 または $|z|=1$

以上から，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z が表す複素数平面上の点全体は，実軸および原点を中心とする半径 1 の円である。ただし，原点を除く

別解　次のように考えて解いてもよい。

$z=x+yi$ (x，y は実数，$(x,\ y) \fallingdotseq (0,\ 0)$) とおく。

このとき，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

したがって，

$$z+\frac{1}{z}=(x+yi)+\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i\right)$$
$$=\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$$
$$=\frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}+\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}i$$

$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるとき，　$\dfrac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}=0$

すなわち，　$y(x^2+y^2-1)=0$

よって，　$y=0$ または $x^2+y^2=1$

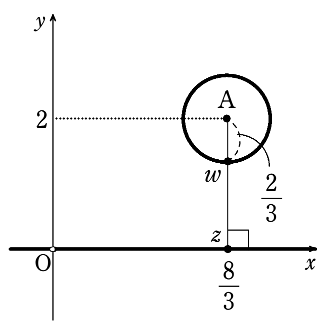
(3)　点 w は，点 $\dfrac{8}{3}+2i$ を中心とする半径 $\dfrac{2}{3}$ の円上にある。

また，$|z-w|$ は 2 点 z，w の距離を表す。

(2) から，z は原点を除いた実軸上または原点を中心とする半径 1 の円上にある。A$\left(\dfrac{8}{3}+2i\right)$ とおく。

[1]　z が原点を除いた実軸上にあるとき

$|z-w|$ が最小となるのは，点 z，w が右の図の位置にあるときである。

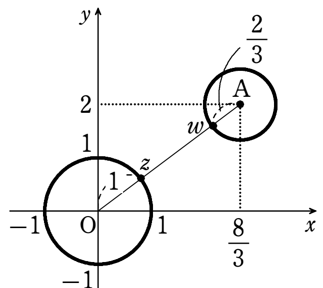


このとき，

$$|z-w|=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

[2]　z が原点を中心とする半径 1 の円上にあるとき

$|z-w|$ が最小となるのは，点 z，w が線分 OA 上にあるときである。



$$\mathrm{OA}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+2^2}$$
$$=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}$$

であるから，このとき，

$$|z-w|=\frac{10}{3}-\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

[1]，[2] から，$|z-w|$ の最小値は，$\dfrac{4}{3}$

＜２０１８　大阪市立大＞

i を虚数単位とする。

(1)　複素数平面上の 3 点 A$\left(\dfrac{i}{2}\right)$，B$\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$，C$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を頂点とする △ABC を考える。

点 z がこの三角形の辺の上を動くとき，複素数 $w=\dfrac{1}{z}$ が表す点 w の描く図形を図示せよ。

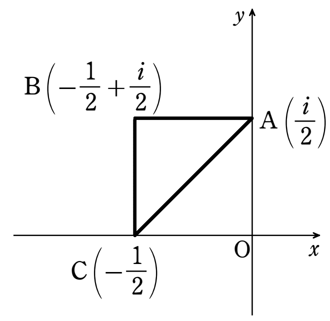
(2)　$|2z+t-it|\leqq 1$ を満たす実数 t が存在するような複素数 z の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。

【解法の分析】

(1)　$\boxed{\text{方針}}$

$z=x+yi$（x，y は実数），$w=X+Yi$（X，Y は実数）とおく。

$w=\dfrac{1}{z}$ から，　$z=\dfrac{1}{w}$



よって，$x+yi=\dfrac{1}{X+Yi}$

したがって，

$$x+yi=\frac{X-Yi}{(X+Yi)(X-Yi)}$$
$$=\frac{X}{X^2+Y^2}-\frac{Y}{X^2+Y^2}i$$

ゆえに，$x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$，$y=-\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$　……①

[1]　点 z が線分 AB 上を動くとき

$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 0$ かつ $y=\dfrac{1}{2}$ であるから，① より，

$-\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{X}{X^2+Y^2}\leqq 0$ かつ $-\dfrac{Y}{X^2+Y^2}=\dfrac{1}{2}$

したがって，

$X^2+Y^2+2X\geqq 0$ かつ $X\leqq 0$ かつ

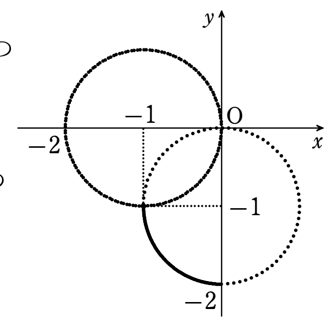
$X^2+Y^2+2Y=0$

すなわち，

$(X+1)^2+Y^2\geqq 1$ かつ $X\leqq 0$ かつ

$X^2+(Y+1)^2=1$

よって，点 w は右の図の実線部分を動く。



[2]　点 z が線分 BC 上を動くとき

$x=-\dfrac{1}{2}$ かつ $0\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから，① より

$\dfrac{X}{X^2+Y^2}=-\dfrac{1}{2}$ かつ $0\leqq-\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\leqq\dfrac{1}{2}$

したがって，

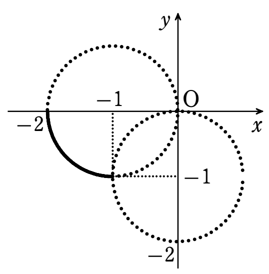
$X^2+Y^2+2X=0$ かつ $Y\leqq 0$ かつ

$X^2+Y^2+2Y\geqq 0$

すなわち，

$(X+1)^2+Y^2=1$ かつ $Y\leqq 0$ かつ

$X^2+(Y+1)^2\geqq 1$



よって，点 w は右の図の実線部分を動く。

[3]　点 z が線分 CA 上を動くとき

$y=x+\dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 0$ であるから，① より，

$-\dfrac{Y}{X^2+Y^2}=\dfrac{X}{X^2+Y^2}+\dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{X}{X^2+Y^2}\leqq 0$

したがって，

$X^2+Y^2+2X+2Y=0$ かつ

$X^2+Y^2+2X\geqq 0$ かつ

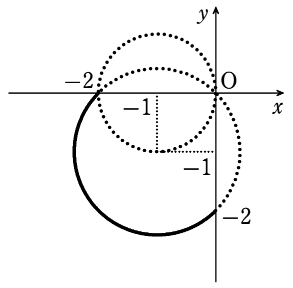
$X\leqq 0$

すなわち，

$(X+1)^2+(Y+1)^2=2$ かつ

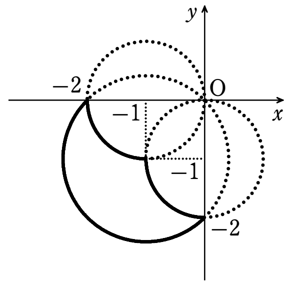
$(X+1)^2+Y^2\geqq 1$ かつ

$X\leqq 0$



よって，点 w は右の図の実線部分を動く。

[1]～[3] から，点 w の描く図形は，右の図の実線部分である。



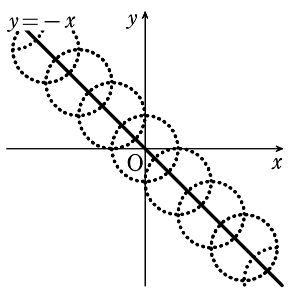
(2)　円の通過領域に関する問題である。

$|2z+t-it|\leqq 1$ … ② を満たす実数 t が存在するとする。

$|2z+t-it|\leqq 1$ から，

$|2z+(1-i)t|\leqq 1$

すなわち，$\left|z+\dfrac{1-i}{2}t\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

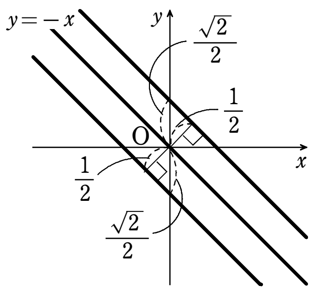


よって，z は点 $-\dfrac{1-i}{2}t$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周上または内部にある。t が実数の範囲を動くとき，点 $-\dfrac{1-i}{2}t$ すなわち点 $-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}ti$ は複素数平面上で，直線 $y=-x$ 上を動く。

直線 $y=-x$ との距離が $\dfrac{1}{2}$ である点の集合は，

直線 $y=-x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

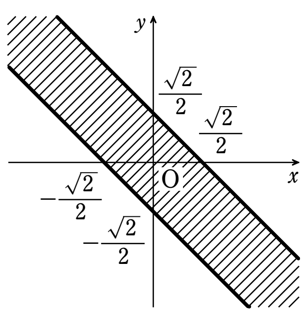
直線 $y=-x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　を表す。



よって，z は不等式 $-x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq y\leqq -x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の表す範囲にある。

逆に，z がこの範囲にあるとき，② を満たす実数 t が存在する。

ゆえに，求める複素数 z の範囲を複素数平面上に図示すると，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。



◎ 複素数の絶対値の最大値に関する問題

＜２０１８　京都工芸繊維大＞

(1)　r を正の実数とし，θ を実数とする。絶対値が r の複素数 z に対して複素数 w を $w=z(\cos\theta+i\sin\theta)$ で定める。複素数 $w-z$ の絶対値 $|w-z|$ を求めよ。

(2)　θ と α を実数とする。絶対値が 1 の複素数 z_1 に対して複素数 z_2，z_3 を

$z_2=z_1(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_3=z_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

で定める。

（ア）　複素数 $\dfrac{z_3}{z_2}$ の実部と虚部を求めよ。

（イ）　$|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|$ を求めよ。

（ウ）　α が $\alpha=2\theta$ を満たし，θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くときの $|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|$ の最大値を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$|w-z|=|z||(\cos\theta-1)+i\sin\theta|$

$=r\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$

$=r\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

$=r\sqrt{2\cdot 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=2r\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

(2) (ア)　$\dfrac{z_3}{z_2}=\dfrac{z_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{z_1(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$=\cos(\alpha-\theta)+i\sin(\alpha-\theta)$

よって，　実部 $\cos(\alpha-\theta)$，　虚部 $\sin(\alpha-\theta)$

(イ)　(ア) より，　$z_3=z_2\{\cos(\alpha-\theta)+i\sin(\alpha-\theta)\}$

また，$|z_2|=|z_1(\cos\theta+i\sin\theta)|=|z_1||\cos\theta+i\sin\theta|=1$

(1) の結果を利用すると，

$|z_3-z_1|=2\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|$，　$|z_3-z_2|=2\left|\sin\dfrac{\alpha-\theta}{2}\right|$

よって，

$|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|=4\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|\left|\sin\dfrac{\alpha-\theta}{2}\right|$

（ウ）　$\alpha=2\theta$ とすると，(イ) より，

$|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|=4|\sin\theta|\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから，$\sin\theta\geqq 0$，$\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$

よって，　$|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|=4\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=8\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=8\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=8\left(1-\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\dfrac{\theta}{2}$

$=-8\cos^3\dfrac{\theta}{2}+8\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\cos\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，$0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$0\leqq t\leqq 1$

$|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|=-8t^3+8t$

$f(t)=-8t^3+8t$ とすると，

$f'(t)=-24t^2+8=-8(3t^2-1)$

$f'(t)=0$ とすると,

$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	最大	↘	

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=-8\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+8\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

よって, $f(t)$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ をとる。

ゆえに, $|(z_3-z_1)(z_3-z_2)|$ は $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ で

最大値 $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ をとる。

◎ 数列との融合問題

＜２０１８　山口大＞

(1)　方程式 $z^n=1$ の解をすべて求め，極形式で表せ。
ただし，解 z の偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2)　(1) で得られた解を偏角が小さい順に c_0, c_1, c_2, ……, c_{n-1} とおく。
このとき，すべての $k=0$, 1, 2, ……, $n-1$ に対して, $|c_{k+1}-c_k|=\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ が成り立つことを示せ。ただし, $c_n=c_0$ とする。

(3)　(2) の c_k に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|c_{k+1}-c_k|$ とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$z^n=1$ より, $|z|^n=1$ であるから　　$|z|=1$

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと, $z^n=1$ より,

$\cos n\theta+i\sin n\theta=1$　　よって, $\cos n\theta=1$, $\sin n\theta=0$

$0\leqq n\theta<2n\pi$ より, $n\theta=2k\pi$　($k=0$, 1, 2, ……, $n-1$)

よって, $\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$　($k=0$, 1, 2, ……, $n-1$)

逆に, $z=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ ($k=0$, 1, 2, ……, $n-1$)

とすると, $z^n=1$ である。

よって, $z^n=1$ の解は,

$z=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$　($k=0$, 1, 2, ……, $n-1$)

(2)　(1) より, $c_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$

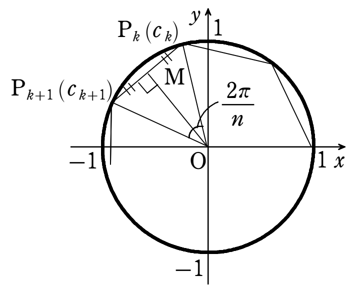
$n=1$ のとき

$c_0=c_1=1$ であるから, $|c_{k+1}-c_k|=0$

$n=2$ のとき

$c_0=c_2=1$, $c_1=-1$ であるから, $|c_{k+1}-c_k|=2$

$n\geqq 3$ のとき，複素数平面上で c_k の表す点は，点 1 を 1 つの頂点として，単位円に内接する正 n 角形の各頂点である。



このとき，右の図から

$|c_{k+1}-c_k|=2P_kM$

$=2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$=2\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{2\pi}{n}}{2}}=\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$

これは, $n=1$, 2 のときも成り立つ。

よって，すべての自然数 n において,

すべての $k=0$, 1, 2, ……, $n-1$ に対して,

$|c_{k+1}-c_k|=\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$

(3)　(2) より,

$S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|c_{k+1}-c_k|=n\sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}=2n\sin\dfrac{\pi}{n}$

よって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2n\sin\dfrac{\pi}{n}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}2\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=2\pi$

＜２０１８　滋賀医科大＞

複素数 a_1, a_2, a_3, ……, a_n, …… を

$a_1=\dfrac{3+i}{3-i}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n-5}{1-5a_n}$ ($n=1$, 2, 3, ……)

で定める。また, $b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}i$ ($n=1$, 2, 3, ……)

とおく。ただし, i は虚数単位である。

(1)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2)　b_n は実数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n+1|$ を求めよ。

(4)　複素数平面上において, a_n ($n=1$, 2, 3, ……) で表されるすべての点は同一円周上にあることを示せ。

【解法の分析】

(1)　$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}i=\dfrac{\dfrac{a_n-5}{1-5a_n}+1}{\dfrac{a_n-5}{1-5a_n}-1}i$

$=\dfrac{a_n-5+(1-5a_n)}{a_n-5-(1-5a_n)}i=\dfrac{-4a_n-4}{6a_n-6}i=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n+1}{a_n-1}i$

$=-\dfrac{2}{3}b_n$

よって, $b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}b_n$

(2) $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-1}i=\dfrac{\dfrac{3+i}{3-i}+1}{\dfrac{3+i}{3-i}-1}i=\dfrac{3+i+(3-i)}{3+i-(3-i)}i=\dfrac{6}{2i}i=3$

よって，数列$\{b_n\}$は初項3，公比$-\dfrac{2}{3}$の等比数列であるから，$b_n=3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　すなわち，b_nは実数である。

(3) $b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}i$ より，　$b_n(a_n-1)=(a_n+1)i$

よって，　$(b_n-i)a_n=b_n+i$

(2)より，b_nは実数であるから，$b_n-i\neq 0$

ゆえに，$a_n=\dfrac{b_n+i}{b_n-i}$

すなわち，$a_n+1=\dfrac{2b_n}{b_n-i}$

b_nは実数であるから，　$a_n+1=\dfrac{2b_n}{{b_n}^2+1}(b_n+i)$

よって，$|a_n+1|=\dfrac{2|b_n|}{{b_n}^2+1}\sqrt{{b_n}^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$ であるから，　$\lim_{n\to\infty}|a_n+1|=0$

(4) $b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}i$ ……① より，　$\dfrac{a_n+1}{a_n-1}=\dfrac{b_n}{i}$

よって，$\dfrac{-1-a_n}{1-a_n}=-b_ni$　……②

3点A(1)，B(−1)，$\mathrm{P}_n(a_n)$ ($n=1$，2，3，……)とする。

ここで，① より　　$a_n\neq 1$

また，$a_n=-1$ と仮定すると，① より，$b_n=0$

これは，$b_n=3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\neq 0$ に矛盾する。

よって，$a_n\neq -1$

ゆえに，A(1)，B(−1)，$\mathrm{P}_n(a_n)$は異なる点である。

(2)よりb_nは実数であるから，$-b_ni$は純虚数である。

すなわち，②から，$\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{B}=90^\circ$

したがって，すべての点a_nは線分ABを直径とする円の周上にある。

別解　$a_n=\dfrac{b_n+i}{b_n-i}$ より，b_nは実数であるから，

$$a_n=\frac{(b_n+i)^2}{{b_n}^2+1}=\frac{1}{{b_n}^2+1}\{({b_n}^2-1)+2b_ni\}$$

よって，$|a_n|=\dfrac{1}{{b_n}^2+1}\sqrt{({b_n}^2-1)^2+(2b_n)^2}$

$$=\frac{1}{{b_n}^2+1}\sqrt{({b_n}^2+1)^2}=1$$

すなわち，すべての点a_nは原点Oを中心とする半径1の円周上にある。

類題　＜２０１８　宮城教育大＞

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を，$a_1=1$，$b_1=0$，

$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n-\dfrac{2}{3}b_n$，

$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$　($n=1$，2，3，……)　により

定義する。iを虚数単位として，$r>0$ と $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を

$\dfrac{1+2i}{3}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　が成り立つように定める。

(1) rの値を求めよ。

(2) 数学的帰納法を用いて

$$a_n+b_ni=\left(\frac{1+2i}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 複素数zに対して，$z\neq 1$ ならば

$$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。

(4) 無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$の和を求めよ。

◎ 確率との融合問題

＜２０１８　広島大＞

0，1，2，3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見てもとに戻す。この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，……，Z_N とする。ここで，N は 3 以上の自然数である。

さらに，複素数 $\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を，

$X_1=\alpha^{Z_1}$，$X_{n+1}=X_n\alpha^{Z_{n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$

により定める。$n=1$，2，……，N に対し，$X_n=\alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n=\alpha^2$ となる確率を Q_n とする。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　$n=1$，2，……，$N-1$ とする。$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n=1$，2，……，N とする。$X_n=1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ。

(4)　$n=1$，2，……，$N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ。

(5)　$n=1$，2，……，N に対し，P_n を求めよ。

【解法の分析】

カードを取り出す試行で定まる複素数を用いた確率の問題である。Z_1，Z_2，……，Z_N はそれぞれ 0，1，2，3 のいずれかの値をとる。また，$\alpha^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

(1)　$X_1=\alpha$ すなわち $\alpha^{Z_1}=\alpha$ となるのは，$Z_1=1$ のときである。よって，$P_1=\frac{1}{4}$

(2)　$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となるのは，$Z_{n+1}=0$，3 のときである。

操作を N 回繰り返すとき，各回の試行は独立である。

よって，求める確率は，　$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(3)　$X_1=\alpha^{Z_1}$，$X_2=X_1\alpha^{Z_2}=\alpha^{Z_1}\alpha^{Z_2}=\alpha^{Z_1+Z_2}$，

$X_3=X_2\alpha^{Z_3}=\alpha^{Z_1+Z_2}\alpha^{Z_3}=\alpha^{Z_1+Z_2+Z_3}$

同様に考えていくと，$n=1$，2，……，N に対して，

$X_n=\alpha^{Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n}$ が成り立つ。

よって，X_n は α の累乗であり，$\alpha^3=1$ であるから，

X_n は 1，α，α^2 のいずれかである。

$X_n=\alpha$ となる確率が P_n，$X_n=\alpha^2$ となる確率が Q_n であるから，$X_n=1$ となる確率は，　$1-P_n-Q_n$

(4)　$X_{n+1}=\alpha$ となる確率が P_{n+1} である。

X_n は 1，α，α^2 のいずれかであり，$X_{n+1}=X_n\alpha^{Z_{n+1}}$ であるから，$X_{n+1}=\alpha$ となるのは，次の [1]～[3] のいずれかの場合である。

[1]　$X_n=1$ かつ $\alpha^{Z_{n+1}}=\alpha$ の場合

$X_n=1$ となる確率は，(3) から，　$1-P_n-Q_n$

$\alpha^{Z_{n+1}}=\alpha$ となるのは，$Z_{n+1}=1$ のときであるから，

その確率は，$\frac{1}{4}$

よって，この場合の確率は，　$\frac{1}{4}(1-P_n-Q_n)$

[2]　$X_n=\alpha$ かつ $\alpha^{Z_{n+1}}=1$ の場合

$X_n=\alpha$ となる確率は，　P_n

$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となる確率は，(2) から，　$\frac{1}{2}$

よって，この場合の確率は，　$\frac{1}{2}P_n$

[3]　$X_n=\alpha^2$ かつ $\alpha^{Z_{n+1}}=\alpha^2$ の場合

$X_n=\alpha^2$ となる確率は，　Q_n

$\alpha^{Z_{n+1}}=\alpha^2$ となるのは，$Z_{n+1}=2$ のときであるから，

その確率は，　$\frac{1}{4}$

よって，この場合の確率は　$\frac{1}{4}Q_n$

[1]～[3] は互いに排反であるから，

$P_{n+1}=\frac{1}{4}(1-P_n-Q_n)+\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}Q_n$

すなわち，　$P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$

(5)　$P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$ を変形すると，

$P_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$ は公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。

その初項は，(1) から，　$P_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$

ゆえに，　$P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

すなわち，　$P_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

類題　＜２０１８　金沢大＞

複素数 $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ と，整数 $k\,(1\leqq k\leqq 5)$ をとる。

1 個のさいころを投げる試行を繰り返し行う。

$n=1$，2，…… に対して，

$$z_n=\begin{cases}\alpha & (n\text{ 回目の試行で } k \text{ 以下の目が出た場合})\\ \alpha^2 & (n\text{ 回目の試行で } k \text{ より大きい目が出た場合})\end{cases}$$

とし，$w_n=z_1z_2\cdots\cdots z_n$ と定める。w_n が実数である確率を p_n とする。

(1)　α を極形式で表せ。

(2)　p_2，p_3，p_4 を k の式で表せ。

(3)　n 回試行を繰り返したとき，k 以下の目が出た回数を m とし，k より大きい目が出た回数を l とする。w_n が実数であるための m，l についての条件を求めよ。

(4)　$k=3$ のとき，p_n を求めよ。

◎ **証明問題**

＜２０１８　埼玉大＞

　複素数平面において，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とし，原点 O を通る円を S とする。S 上に O 以外の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$，$\mathrm{C}(c)$ をとる。A と B を通る直線を ℓ_1，B と C を通る直線を ℓ_2，C と A を通る直線を ℓ_3 とし，点 O から ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{D}(d)$，$\mathrm{E}(e)$，$\mathrm{F}(f)$ とする。

(1)　$\mathrm{Q}(2ab)$ ととる。3 点 O，A，Q および 3 点 O，B，Q がそれぞれ一直線上にないとき，△OAQ と△OBQ は二等辺三角形であることを示せ。

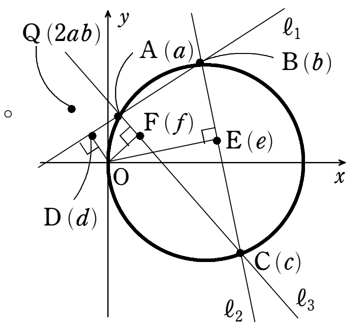
(2)　複素数 d，e，f を a，b，c を用いて表せ。

(3)　3 点 D，E，F は同一直線上にあり，点 O からその直線に下ろした垂線の足を表す複素数は abc であることを示せ。

【解法の分析】

複素数平面を利用してシムソンの定理を証明する。

(1)　省略



(2)　$a \neq 0$，$b \neq 0$ であるから，
$2ab \neq 0$
よって，点 Q は原点 O と異なる。
(1) より，$\mathrm{AQ}=\mathrm{OA}$ であるから，A は 2 点 O，Qから等距離にある。
また，(1) より，$\mathrm{BQ}=\mathrm{OB}$ であるから，B は 2 点 O，Q から等距離にある。ゆえに，
点 A，B はともに線分 OQ の垂直二等分線上にある。
異なる 2 点 A，B を通る直線はただ 1 つであるから，
直線 ℓ_1 は線分 OQ の垂直二等分線である。
よって，D は線分 OQ の中点であるから，

$$d=\frac{0+2ab}{2}=ab$$

同様に考えると，　$e=bc$，$f=ca$

(3)　複素数平面上に点 $\mathrm{R}(2abc)$ をとる。

(2) から，　$\mathrm{DR}=|2abc-d|=|2abc-ab|$
　　　　　　$\mathrm{OD}=|d|=|ab|$

点 C は $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円上にあるから，

$$\left|c-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

したがって，$|2abc-ab|=\left|2ab\left(c-\dfrac{1}{2}\right)\right|$

$$=2|ab|\left|c-\frac{1}{2}\right|=2|ab|\cdot\frac{1}{2}=|ab|$$

よって，　$\mathrm{DR}=\mathrm{OD}$　……①

同様にして，$\left|a-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\left|b-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ から，

　$\mathrm{ER}=\mathrm{OE}$，$\mathrm{FR}=\mathrm{OF}$　……②

また，$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ であるから，$2abc \neq 0$
よって，点 R は原点 O と異なる。
①，② から，3 点 D，E，F はすべて線分 OR の垂直二等分線上にある。
ゆえに，3 点 D，E，F は同一直線上にある。
点 O から線分 OR の垂直二等分線に下ろした垂線の足は，線分 OR の中点であるから，それを表す複素数は，abc

4　おわりに

　複素数平面という分野は，複素数を平面上の点に対応させることで，複素数を図形的に考えることが可能になったり，逆に，図形を複素数で考えることも可能になったりと応用力が必要になってくる。そのため，複素数の演算の持つ図形的な意味を把握することがとても重要になる。また，計算が煩雑になる場合が多く，学習時期も遅いため，入試時期までに理解を深めるだけの時間的な余裕がなく，問題演習をこなしているだけになっている可能性も高いのが現状である。こういった現状を踏まえて，生徒たちの学習意欲を向上させるためにも，既習事項との関連性を示しながら丁寧な指導を行っていく必要がある。今回の研究で得られたことを今後の指導に生かしていきたい。

【参考文献】

2018 年度　全国大学項目別数学入試問題詳解
（聖文新社）