高等学校数学につながる中学３年数学の指導法の研究

愛媛県立今治東中等教育学校　　浅木　剛紀

１　はじめに

本校は、中学校にあたる前期課程３年間、高等学校にあたる後期課程３年間の中高一貫教育校である。中学生と高校生が同じ校舎で学校生活を送っており、長期的視野に立って教育活動を行っている。心身の発達が著しい時期であり、日々の指導における責任の大きさを常に感じている。

３年前より数学部会学習指導法研究委員に選出していただき、中高の指導の連携について研究させていただいている。今年度は３年生を主に担当していることから、３年生の内容から後期課程（高等学校）に直接つなげることができる単元や内容について、どのような指導が効果的かを考えるため、本主題を設定した。

１、２年生までの内容に比べ、３年生は高等学校につながる内容が多く存在する。特に数学Ⅰ、数学Ａとの関連が多く、４年生（高校１年生）への指導のつながりを考えたときには、重要な１年になると感じている。大学入学共通テスト等も視野に入れつつ、どのような指導が効果的かを考えることは、これまで以上に重要な意味を持つのではないかと思っている。

２　高等学校につながる中学３年の学習単元

本校で使用している教科書は、前期課程では啓林館の「未来へひろがる　数学」、後期課程では数研出版の「新編　数学」であるため、それらの教科書で研究を行った。

３年生の学習単元の中で高等学校に直接つなげることができる主な単元は、「式の展開と因数分解」、「関数 $y=ax^2$」である。

「式の展開と因数分解」の単元においては、展開、因数分解ともに簡単な公式のみを３年生で学習するが、その全てが数学Ⅰにも応用できるものである。数学Ⅰを指導する際、展開においては３次式の公式、因数分解においてはいわゆる「たすきがけ」の問題以降を補充すれば良いことになり、同じ内容を２度学習する必要はないと考えられる。

「関数 $y=ax^2$」の単元においては、頂点が原点のものに限られるが、二次関数のグラフの特徴や最大値、最小値の求め方などは、数学Ⅰの二次関数にも応用できるものと考えられる。また、二次方程式において平方完成をして解く方法も学ぶことから、平方完成の基礎知識は身に付けた状態で数学Ⅰの学習をスタートすることができる。

x の１次の項をふくむ二次方程式 $x^2+px+q=0$ は，

$$(x+m)^2=n$$

の形に変形して解くことができます。

例５　$(x+m)^2=n$ の形にして二次方程式を解く

$x^2-6x-1=0$

数の項 -1 を移項して，

$x^2+6x=1$

x の係数６の半分の２乗を両辺にたすと，

$x^2+6x+3^2=1+3^2$

$(x+3)^2=10$

$x+3=\pm\sqrt{10}$

$x=-3\pm\sqrt{10}$

$x^2+6x=1$

半分の２乗

$x^2+6x+3^2=1+3^2$

$(x+3)^2$

３　高等学校につながる中学３年の学習内容

細かな内容に関しても、数多くの内容が挙げられる。主なものを考察していきたい。

(1)　最大公約数と最小公倍数（応用）

教科書の巻末に「ひろがる数学」という項目があり、中学校の教科書でも発展的な内容として位置付けられている。全員が一律に学習する必要はないのだが、高等学校につながる内容も多いため、必要に応じて扱っている。

「素因数分解」に関連して、最大公約数と最小公倍数が取り上げられている。数学Ａで学習する内容であるが、中学生向けに数学Ａよりも分かりやすく書かれている。そのため、３年生だけではなく４年生の授業においても活用できる構成となっている。センター試験数学Ⅰ・Ａでも出題される内容であるため、定着させるべき内容であると認識している。他社の教科書だけではなく、中学校、小学校の教科書も活用するなど、幅広い教材研究が指導の幅を広げることになると感じている。

３つの自然数48，36，90の最大公約数と最小公倍数は，それぞれを素因数分解すると，次のようにして求めることができます。

$48=2\times2\times2\times2\times3$

$36=2\times2\qquad\times3\times3$

$90=2\qquad\qquad\times3\times3\times5$

最大公約数　$2\qquad\times3\qquad=6$

最小公倍数　$2\times2\times2\times2\times3\times3\times5=720$

３　次の３つの自然数の最大公約数と最小公倍数を求めましょう。

60，　45，　30

自由研究の窓

２数 a，b の最大公約数を G，最小公倍数を L とすると，

$ab=GL$

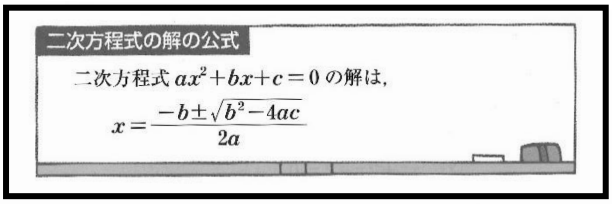
となります。

この関係が成り立つ理由を考えてみましょう。

(2)　二次方程式の解について（応用）

「二次方程式」の単元において、解の公式を学ぶことになっている。中学生の範囲では実数解が存在する問題しか扱わないが、高等学校で学習する「虚数解」について触れることのできる機会でもある。「根号内が負の数になるものは考えない」ではなく、「根号内が負の数になるものは虚数解」という指導につなげることができる。実際に存在しない数であるため理解が難しい内容ではあるが、先を見通した指導としては有効であると考えている。「実際に存在しない数を学ぶ意義」をしっかりと認識して指導できるようにしていきたい。

また、根号内の正負によって解の個数（正確には実数解の個数）が変わることにも気付かせたい。（いわゆる「判別式」）どういった条件を満たせば実数解を持つのか、更には二次関数のグラフとの関連にも結び付けることができれば、理解はより広がっていくと考えられる。

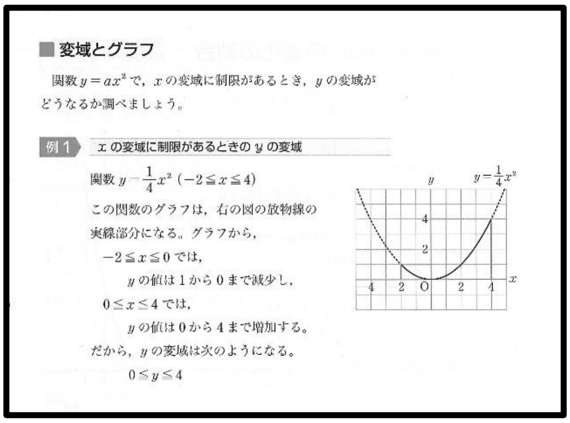

二次方程式の解の公式

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(3)　二次関数の場合分けの問題への応用

「関数 $y=ax^2$」の単元で扱うのは、頂点が原点にある場合のみである。そのため頂点（あるいはグラフ）を動かすことはできないが、変域を動かすことはできる。そのため、グラフを固定したまま変域を移動させる場合分けの問題には挑戦させることができる。実際に、変域が「$a \leqq x \leqq a+1$」で与えられたときに、最大値と最小値を求める問題に挑戦をさせた。かなり細かく解説を加えないと理解は難しい様子であったが、最大値や最小値を求めるために場合に分けて求める必要性は理解したようであった。


■変域とグラフ

関数 $y=ax^2$ で，x の変域に制限があるとき，y の変域がどうなるか調べましょう。

例1　x の変域に制限があるときの y の変域

関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$

この関数のグラフは，右の図の放物線の実線部分になる。グラフから，

$-2 \leqq x \leqq 0$ では，

y の値は1から0まで減少し，

$0 \leqq x \leqq 4$ では，

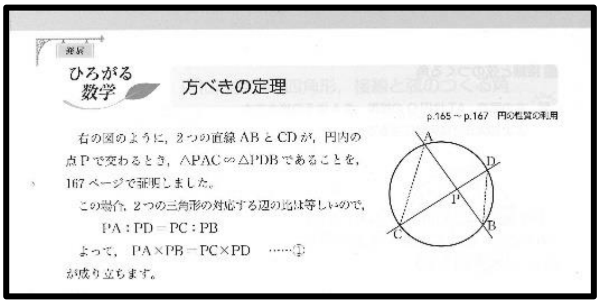
y の値は0から4まで増加する。

だから，y の変域は次のようになる。

$0 \leqq y \leqq 4$

(4)　対応する辺の比から方べきの定理へ（応用）

「図形と相似」の単元では、２つの三角形が相似であることの証明や、相似である２つの図形が持つ性質を学ぶ。その性質を応用させ、相似であれば対応する辺の比が等しいことから、数学Ａで学ぶ「方べきの定理」を導くことができる。中学校の範囲では補助線等を引かなければ求められない辺の長さが、この定理を用いれば簡単に求まることがある。このことから、知識を広げることへの有用性を実感させたい。


発展　ひろがる数学　方べきの定理

p.165～p.167　円の性質の利用

右の図のように，2つの直線 AB と CD が，円内の点 P で交わるとき，△PAC∽△PDB であることを，167 ページで証明しました。

この場合，2つの三角形の対応する辺の比は等しいので，

PA : PD＝PC : PB

よって，　PA×PB＝PC×PD　……①

が成り立ちます。

４　まとめ

今年度も習熟度の高い発展講座を主担当としているため、発展的な内容、高等学校でも難解な内容を取り上げることが多かった。難易度はかなり高いが、生徒たちは諦めることなく正解を導き出そうと取り組めていた。

大学入学共通テストを視野に入れ、定期考査にも思考力を必要とする問題を出題するようにした。高等学校から指導を始めるのではなく、早期にそのような問題に対応できる力を身に付けさせることが本校では重要になると感じている。

そのためには、中高のつながりはもちろんのこと、大学入試問題、高校入試問題、模試などの問題の研究は欠かせない。更には、数学が実生活にどのように応用されているか、私自身も理解を深めていく必要がある。新テストに対応できるような実力を身に付けさせるためにも、更なる指導法の研究を進めていきたい。

５　引用文献・参考文献

・　『未来へひろがる　数学３』（啓林館）
・　『新編　数学Ⅰ（改訂版）』（数研出版）
・　『新編　数学Ａ（改訂版）』（数研出版）
・　平成 30 年度センター試験Ⅰ・Ａ問題