平成 27 年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校　　　近藤　弘法

1　はじめに

5月 16 日（土）に松山南高等学校において，愛媛大学理学部平野　幹　教授より平成27年度愛媛大学数学入試問題の解説があった。では，どこでどのような間違いが生じてくるのか，本校生徒の誤答分析を中心に考察していきたい。

2　出題の傾向

（1）出題傾向

今年度は教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースにおいて記述４題を 100 分で，理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く），医学部医学科においては記述５題を 120 分で，後期は記述４題を 120 分で解答する。

（2）出題内容

教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコース

1　小問集合
2　図形と方程式
3　微分法・積分法
4　確率

理学部，工学部

4　確率
5　小問集合
6　空間ベクトル
7　数列
8　微分法・積分法

医学部医学科

6　空間ベクトル
7　数列
8　微分法・積分法
9　平面図形・微分法・積分法
１０　確率

工学部後期

1　小問集合（穴埋め）
2　小問集合
3　微分法・積分法
4　微分法・積分法

（3）難易度

今年度の難易度としては基本～標準レベルの問題を中心に出題されているが、各大問の最後の問題は難しめで作成されたそうである。テストは時間が限られているため、全体を見通してどの問題を解くのかということを選び抜くことも１つの能力であると話されていたとおり、計算量が大幅に増えた印象を受けた。

3　問題分析

本校の３年生に入試問題を解いてもらう。３年生の文型の生徒に１～４，理型生徒に４～１０，理数科生徒に後期１～４を解いてもらった。採点基準は公表されていないため，定期考査に準じて採点し，得点率と誤答例から分析を行った。

＜前期＞

$\boxed{1}$　次の問いに答えよ。

(1)　$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とすると　き，a^2+4a+5 の値を求めよ。

(2)　次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=1 \\ x\log_2 x-y\log_2 y=0 \end{cases}$$

(3)　s，t を実数とする。座標空間内の同一平面上にある 4 点 O$(0,0,0)$，A$(4,s,t)$，B$(2,3,2)$，C$(0,5,1)$ が $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ をみたすとき，s，t の値を求めよ。

(4)　初項が 3，公比が 4 である等比数列の第 k 項を a_k とする。このとき，$\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2} a_k$ を求めよ。

問題番号	(1)	(3)	(4)	合計
得点率	66.7	41.6	35.2	59.0
標準偏差	2.5	2.5	1.8	5.4

【誤答例】

(1)　$a^2+4a+5=(a+1)(a+4)$ としている。
３乗の展開ができていない。

(3)　内積の計算はできているが、それ以降の解答の方針が立っていない。
連立方程式が正確に解けていない。

(4)　a_k だけ求まっている。

$\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2} 3\cdot 4^{k-1}=\frac{3\left(4^{n^2}-1\right)}{4-1}$　としている。

$\boxed{2}$ 原点をＯとする座標平面上に３点Ａ(0，3)，Ｂ(4，0)，Ｃ(4，4)を頂点とする三角形ABCがあり，線分AB上に点Ｐがある。ただし，Ｐは線分ABの端点にないものとする。直線OPによって三角形ABCを２つの図形に分けたとき，点Ａを含む図形の面積を S とする。線分APの長さを t とするとき，次の問いに答えよ。

(1) t の値の範囲を求め，点Ｐの座標を t を用いて表せ。

(2) 直線OPが線分ACと共有点を持つような t の値の範囲を求め，その共有点の座標を t を用いて表せ。

(3) S を t を用いて表せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	67.3	26.8	0.6	31.4
標準偏差	2.5	3.0	0.2	5.2

【誤答例】

(1) t の範囲は求まっているが、点Ｐの座標が求められていない。

(2) t の範囲は求まっているが、共有点の座標が求められていない。

直線OPもしくはACの方程式が間違っている。

(3) 場合分けができていない。

$\boxed{4}$ n を自然数，i を虚数単位とする。集合 I_1，I_2，I_3，I_4 および A を

$$I_1=\{k \mid k \text{は} n \text{以下の自然数}\}$$
$$I_2=\{-k \mid k \text{は} n \text{以下の自然数}\}$$
$$I_3=\{ki \mid k \text{は} n \text{以下の自然数}\}$$
$$I_4=\{-ki \mid k \text{は} n \text{以下の自然数}\}$$
$$A=I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4\cup\{0\}$$

とする。集合 A の要素が１つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある。ただし，それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする。これらのカードをよくまぜて，左から一列に並べる。左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，次の確率を求めよ。

(1) 積 $X_1X_2X_3$ が０となる。

(2) 積 $X_1X_2X_3$ が実数となる。

(3) 和 X_1+X_2 が実数となる。

(4) $X_1(X_2+X_3)$ が０となる。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
文型得点率	18.2	0.0	1.5	0.0	4.7
文型標準偏差	2.4	0.0	0.4	0.0	2.5
理型得点率	37.2	9.0	5.6	3.1	12.3
理型標準偏差	1.9	1.4	0.9	0.5	3.5

【誤答例】

問題を正確に処理できていない。

うまく場合分けができていない。

$\boxed{5}$（医学部希望者は除く）

次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x^3e^{x^2}dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\log x|dx$ を求めよ。

(3)　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(\sqrt{2}\,,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(4)　$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき，$a^4+5a^3+4a^2+4a$ の値を求めよ。

(5)　実数 a，b，c は $0<a<b<c$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$ をみたすとする。このとき，$|b-a|<|b-c|$ が成り立つことを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	合計
得点率	23.1	57.1	66.0	49.4	12.2	41.5
標準偏差	1.6	1.6	1.8	1.7	1.2	4.7

【誤答例】

(1)　$\displaystyle\int e^{x^2}dx=\frac{e^{x^2}}{2x}$ として間違えている。

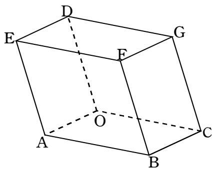
(2)　積分範囲が分けられていない。
　$\dfrac{1}{e}\log\dfrac{1}{e}$ の値が間違っている。

(3)　微分して接線の方程式を求めようとしているが、計算が間違っている。

(4)　$a=\sqrt{5}-2$ は計算できているが、代入して計算できていない。

(5)　証明の方針が立っていない。

$\boxed{6}$　t を実数とする。座標空間内に 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，C$(-1,\ 6,\ -2)$，D$(t,\ -2,\ 4)$ がある。図のような平行六面体 OABC−DEFG において，点 P が平行四辺形 DEFG の周および内部を動くとき，△OCP の面積 S の最小値を m とする。また，平行四辺形 DEFG を含む平面を □ とし，点 O から平面 □ に下ろした垂線と平面 □ との交点を Q とする。



(1)　平行四辺形 OABC を含む平面に垂直な単位ベクトル $\vec{u}$ で，その z 成分が正となるものを求めよ。

(2)　線分 OQ の長さを求めよ。

(3)　点 Q が平行四辺形 DEFG の周または内部にあるとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(4)　t が (3) で求めた範囲にあるとき，m の値および $S=m$ となる点 P の座標をすべて求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	44.9	5.6	0.0	0.0	14.9
標準偏差	2.7	0.8	0.0	0.0	3.2

【誤答例】

(1)　単位ベクトルという条件を忘れている。
　成分の与えられたベクトル同士の内積の計算が理解できていない。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が求められていない。
　同一平面上にあるための条件 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DP}}+t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ が理解できていない。

(3)　存在範囲に関する理解が足りていない。

$\boxed{7}$　a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1=a\,,\ a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1 & (n\ \text{が奇数のとき})\\ 2a_n & (n\ \text{が偶数のとき})\end{cases}$$

$$b_1=a\,,\ b_{n+1}=\begin{cases}2b_n & (n\ \text{が奇数のとき})\\ b_n+1 & (n\ \text{が偶数のとき})\end{cases}$$

で定める。

(1)　a_2，a_3，a_4，および b_2，b_3，b_4 を求めよ。

(2)　数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_{2n}$ で定める。$\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$，および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}a_k\,,\ T_n=\sum_{k=1}^{2n}b_k\,,\ U_n=S_n-T_n$$

で定める。

（i）$\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

（ii）$a=1$ のとき，$\{U_n\}$ の一般項を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3 i)	(3 ii)	合計
得点率	90.6	41.9	8.2	1.3	35.9
標準偏差	1.8	1.5	1.3	0.5	3.5

【誤答例】

(1)　計算をし忘れている。
　a_n と b_n の計算を入れ替えてしまっている。

(2)　c_{n+1} と c_n の関係式ができていない。
　推測によって求めているが、証明できていない。

(3)　a_n の奇数項の和が求められていない。
　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{2n}a_{2k}+\sum_{k=1}^{2n}a_{2k-1}$ として計算している。
　(i) までができていない。

$\boxed{8}$ n を自然数とし，曲線 $y=n\sin\dfrac{x}{n}$ と円 $x^2+y^2=1$ の第１象限における交点の座標を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1) $x>0$ のとき，不等式 $n\sin\dfrac{x}{n}<x$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $p_n>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，不等式

$$(☆)\quad \left(n\sin\frac{1}{n}\right)x\leqq n\sin\frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して，次の(ｉ)，(ⅱ)に答えよ。

(ｉ) 不等式 $P_n\leqq\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2\sin^2\dfrac{1}{n}}}$ が成り立つことを示せ。

(ⅱ) x 軸，直線 $x=p_n$，および曲線 $y=n\sin\dfrac{x}{n}$ $(0\leqq x\leqq p_n)$ で囲まれた領域の面積を S_n とするとき，S_n を p_n を用いて表せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

(4) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，(3) の不等式(☆)が成り立つことを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3ｉ)	(3ⅱ)	(4)	合計
得点率	39.7	13.5	10.3	0.6	0.6	12.9
標準偏差	1.8	1.1	1.2	0.2	0.2	3.5

【誤答例】

(1) $f(x)=x-n\sin\dfrac{x}{n}$ の単調増加はいえているが、端点 $f(0)$ の値が求められていない。
証明の方針が立っていない。

(2) 証明の方針が立っていない。

(3) 証明の方針が立っていない。

(4) 証明の方針が立っていない。

$\boxed{9}$（医学部希望者のみ）

a を正の実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) １辺の長さが１，他の２辺のうち１辺の長さが a である三角形の中で，面積が最大である三角形の残りの１辺の長さを a を用いて表せ。

(2) ２辺の長さが１，他の２辺のうち１辺の長さが a である四角形の中で，面積が最大である四角形の残りの１辺の長さを a を用いて表せ。

$\boxed{10}$（医学部希望者のみ）

n を自然数，i を虚数単位とする。集合 I_1，I_2，I_3，I_4 および A を

$I_1=\{k\mid k$ は n 以下の自然数$\}$
$I_2=\{-k\mid k$ は n 以下の自然数$\}$
$I_3=\{ki\mid k$ は n 以下の自然数$\}$
$I_4=\{-ki\mid k$ は n 以下の自然数$\}$
$A=I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4\cup\{0\}$

とする。集合 A の要素が１つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある。ただし，それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする。これらのカードをよくまぜて，左から一列に並べる。左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，次の確率を求めよ。

(1) 積 $X_1X_2X_3$ が０となる。

(2) 積 $X_1X_2X_3$ が実数となる。

(3) 和 X_1+X_2 が実数となる。

(4) $X_1(X_2+X_3)$ が０となる。

(5) $X_1(X_2+X_3)$ が実数となる。

＜後期＞

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) a，b を実数とする。等式 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x}-1}=8$ が成り立つとき，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) n を自然数とする。１つのさいころを n 回投げるとき出た目のすべての数の積が６の倍数となる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　$x=\dfrac{2}{-1+\sqrt{3}\,i}$ とするとき，$x^{2015}+x=$ $\boxed{\quad エ\quad}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(4)　$a>1$ とする。不等式 $(\log_a x)^2<\log_a x^2$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{\quad オ\quad}$ である。

(5)　座標平面上の 3 点 A(3，0)，B(5，0)，C(4，2) を頂点とする三角形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は $\boxed{\quad カ\quad}$ である。

問題番号	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)	(カ)	合計
得点率	43.2	35.1	5.4	48.6	37.8	24.3	30.7
標準偏差	1.5	1.4	1.1	2.0	2.4	2.1	6.2

【誤答例】

(ア)　6

(イ)　1，2

(ウ)　$\dfrac{6^n-4^n-3^n}{6^n}$，$1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(エ)　$-\sqrt{3}\,i$，0

(オ)　$0<x<a^2$，$a<x<a^2$

(カ)　28□，8□，$\dfrac{230}{3}\pi$

$\boxed{2}$　次の問いに答えよ。

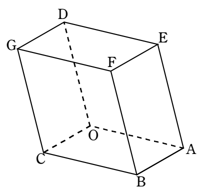
(1)　n を 2 以上の自然数とする。n 個の数 1，2，…，n のうち異なる 2 つの数の積の総和を求めよ。
ただし，$a\times b$ と $b\times a$ は同じものとする。

(2)　r を正の実数とする。2 つの円

$$C_1:x^2+y^2=17\ ,\ C_2:(x-10)^2+(y-11)^2=r^2$$

が点 A(3，5) を通る共通接線をもつとき，r の値を求めよ。

(3)　座標空間内に図のような平行六面体 OABC−DEFG がある。ただし，
O(0，0，0)，A(0，2，0)，
C(a，b，0)，D(p，q，r)
とし，$a>0$，$p>0$，$r>0$ とする。
O，A，B，E を頂点とする四面体が正四面体となるとき，a，b，p，q，r の値を求めよ。



問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	8.1	14.4	30.1	17.4
標準偏差	2.1	2.8	2.8	6.0

【誤答例】

(1)　書き出せているが、計算ができていない。

(2)　円の接線の方程式を覚えていない。
半径が求められていない。

(3)　p，r の値が間違っている。
条件が書き出せていない。

$\boxed{3}$　次の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\right|dx$ を求めよ。

(2)　関数 $H(x)=\displaystyle\int_0^{x}(x-t)t\sin t\,dt$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}H(x)$ を求めよ。

(3)　関数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，$\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	29.1	12.0	2.7	14.5
標準偏差	3.1	2.5	1.3	5.3

【誤答例】

(1)　積分範囲が分けられていない。
絶対値をはずす前に $t=\cos x$ と置換して計算している。

(2)　定積分を計算しようとして、間違えている。

(3)　逆関数が求められていない。

$\boxed{4}$　$x>0$ において定義された関数 $f(x)=e^x\log x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の値域を求めよ。

(2)　$f(x)$ の増減を調べよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ はただ 1 つの変曲点をもつことを示せ。

(4)　点 (□，$f(\alpha)$) を曲線 $y=f(x)$ の変曲点とするとき，$\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{2}{e}$ であることを示せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	23.8	19.3	15.4	3.6	15.4
標準偏差	1.4	1.9	2.1	0.7	4.8

【誤答例】

(1)　関数の連続性が記述されていない。

(2)　$f'(x)$ は計算できているが、正負が求められていない。

(3)　$f''(x)$ は計算できているが、証明の方針が立っていない。

(4)　証明の方針が立っていない。

(2)　差を計算して示そうとしている。
$\displaystyle\int_0^{x}\frac{t^4}{1-t^2}dt\geqq 0$ のみ示している。

4　おわりに

全体的にあまりできていなかった。無答の目立つ答案も例年に比べ多かったように感じている。また、計算量が増えたことにより、完答できずに焦ってしまった生徒も多かった。特に前期 $\boxed{4}$ の確率の問題は文型、理型共にできていなかった。問題文を正しく読みとり、何を考えたのかを全く表現できていなかった。後期の問題については生徒達に解説をすると納得できていたが、空間図形についてはなかなか想像できておらず、今後の指導の参考となった。

説明会で平野教授は「問題を見抜く力と問題に取り組む力が大事である」と言われていた。全体の問題を見通して問題に取り組むことの重要さを改めて考えさせられた。また、「推論の根拠の提示をしっかりさせてほしい。『〜だから･･･』や『〜と仮定すると、･･･が矛盾する』といった説明を用いて、自分の考えた内容を表現してもらいたい。『こう書きなさい』と指導された一文ではなく、考えたことを正確にポイントを絞って解答してほしい。」とも言われていた。自分の考えを正確に分かりやすく表現する国語力も必要とされている。上辺の知識では解答にボロが出てしまうため、学んだ内容をきちんと深く理解することが、自分の考えを表現する事につながる。

今後はただ目の前の答に目を向けるのではなく、その解答の内容まで考えさせる指導をしていかなければならないと強く感じた。