国公立大学入試問題の研究

―東京大学・京都大学の入試問題について（文系）―

愛媛県立新居浜西高等学校　　吉村　新平

1　はじめに

東京大学・京都大学の個々の問題については、昨年度までの数学部会の研究においても度々取り上げられている。京都大学は「深い思考力を問う」、東京大学は「高度な処理能力を問う」とよく比較されるが、最近の出題傾向はその通りなのだろうか。それぞれの大学の入試全体を通して、出題傾向などに特徴はないか興味を持った。今回は、文系の入試において、出題される分野に偏りがないか、理系との共通問題はどの程度出題されているのかなどを調べてみた。

2　出題分野についての比較

過去５年間の入試において、出題された分野と、理系との共通問題について、以下の表にまとめた。理系との共通部分については、○…完全に同じ内容であるもの、△…理系の問題の一部を抽出したもの、●…テーマは同じであるが、与えられる式や条件が異なるもの、の３つに分類した。また、証明を含む問題には「証」の記号を付した。

両者を比較してみると、出題分野に偏りがあることがわかる。京都大学ではベクトルに関する問題が 5 年間で 4 問と、ほぼ毎年出題されている。空間ベクトルに関する問題が多く、文系生徒にはやや厳しいように思われるが、垂線に関する問題が多く〔資料 1〕、「垂直⇔内積ゼロ」の考え方に習熟していれば発想に苦しむことはないはずである。一方で、東京大学ではベクトルを利用しなければ解けない問題は過去 5 年間で１問も出題されていない。

逆に、図形と方程式に関する問題は、東京大学では H23 年度入試以来出題され続けているのに対し、京都大学では、H23～H26 の 4 年間は問題のメインテーマとして採用されていない。図形をベクトルでとらえさせるか、方程式でとらえさせるか、各大学の（出題者の？）こだわりが見える。しかし、H27 年度入試では京都大学にも図形と方程式の問題〔資料 2〕があり、今後出題が増える可能性はある。東京大学では図形の通過領域に関する問題が 2 年連続で出題されている。〔資料 3，4〕

また、確率の出題について、東京大学では多くが漸化式を用いて確率を求めさせる問題（４問中３問）であるが、京都大学ではどの問題も漸化式を用いずに確率を求めることができる。

数学 B の内容でほとんどの高校で学習している数列、ベクトルの 2 つの分野について、東京大学は数列、京都大学はベクトルと、はっきりと出題傾向が分かれたことは興味深い。

表１　東京大学（文科）出題内容

○…全部共通、△…一部抽出、●…類題、証…証明

年度	1	2	3	4
H27	整数、不等式	図形の通過領域、積分法	図形と方程式 相加･相乗平均	確率と漸化式
	証			●
H26	2 次関数、微分法	確率と漸化式	線分の通過領域	整数、漸化式
		△	●	△証
H25	2 次方程式、微分法	図形と方程式（2 次曲線）	領域と最大・最小	確率
				△
H24	2 次方程式、2 次不等式	図形と方程式 相加･相乗 平均	確率と漸化式	微・積分法
			○	
H23	微・積分法	漸化式 小数部分	整数	軌跡、双曲線
		△	△	○

表２　京都大学（文系）出題内容

○…全部共通、△…一部抽出、●…類題、証…証明

年度	1	2	3	4	5
H27	図形と方程式 積分法	平面図形 相加･相乗 平均	確率	空間ベクトル	整式、整数
		○			●証
H26	三角関数、2 次方程式	微・積分法	空間ベクトル	対数、漸化式	確率 期待値
	証		○		
H25	2 次関数	平面ベクトル	整式、整数	微・積分法	確率
		○	●証		●
H24	(1) 積分法 (2) 確率	三角比、空間図形	微分法	平面図形	三角関数 領域
		○証	○	●証	
H23	(1) 平面図形 (2) 確率	空間ベクトル	微分法	積分法	数列、対数
	(2) ○			●	

証明問題が多いのも京都大学入試の特徴である。これが京都大学の入試を「深い思考力を問う」ものと感じさせる要因なのかもしれない。難易度はH27年度入試の第5問〔資料5〕のように何を示せばよいか発想に苦しむものから、H26年度入試の第1問〔資料6〕のように示すべきものが比較的分かりやすいものまで様々である。

証明問題については、東京大学H27年度入試の第1問〔資料7〕や、京都大学H24年度入試第4問〔資料8〕のように、真偽の判断からしなければいけない問題も出題されている。具体的な数値の代入や図形のイメージなどにより、法則性を見つける力がどちらの大学でも問われている。

他の共通点としては、ほとんどの大学でもそうであろうが、微・積分法に関する問題は必ず毎年出題されていることである。微・積分法に関する問題はアプローチの仕方が分かりやすく、比較的難易度の低い問題が多いように感じられた。

また、相加平均と相乗平均の大小関係を利用して関数の最大値や最小値を求めさせる問題もよく出題されている。数学Ⅲを履修していれば分数関数の微分で対応することもできるが、相加・相乗平均を用いる方が式も簡単である。個別試験で数学を必要とする文系生徒には確実に習得させておきたいスキルである。

理系との共通問題については、どちらの大学とも40～50%である。東京大学は理系の問題を一部抽出したタイプが多く、京都大学では理系の問題の数値や条件を変更したものが多い。京都大学の問題のように、少し条件を変えただけで、難易度が大きく変わる問題〔資料9〕があることは興味深く、解き比べてみると勉強になる。

東京大学H25年度入試の第2問〔資料10〕は、理系と共通ではないが、出題されている内容が2次曲線に関する問題であり、数学Ⅲ（当時は数学C）を履修した生徒にとっては解答しやすい問題である。数学Ⅱで学ぶ2点間の距離の求め方だけで解けるのだが、途中の式変形は複雑で、文系生徒にはやや難しい問題である。逆に理系の生徒であれば、ほとんど数式を使わずに解けてしまう。H23年度入試の第5問でも、求める軌跡が分数関数（双曲線）になり、2次曲線の学習をしていない文系生徒には図がイメージしづらい問題であった。後期課程入試（H28年度入試より廃止）で文科志願者にも数学Ⅲの知識を問う問題を出題しており、文系学生にも理系と同等の知識量を求めているようである。

〔資料1〕H26年度入試　京都大学　第3問

座標空間における次の3つの直線 l, m, n を考える：

l は点 A$(1, 0, -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2, 1, -1)$ に平行な直線である．

m は点 B$(1, 2, -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1, -1, 1)$ に平行な直線である．

n は点 C$(1, -1, 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1, 2, 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{w}=0$　を活用すれば $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を1つの文字で表すことが容易にできる。あとは2次関数の最大値を求めればよい。

〔資料2〕H27年度入試　京都大学　第2問

直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し，その面積を求めよ．

直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わる条件は，2次方程式 $x^2-x=px+q$ の判別式から。
$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフと交わらない条件を，グラフをかいて確かめる。

〔資料3〕H27年度入試　東京大学　第2問

座標平面上の2点 A$(-1, 1)$，B$(1, -1)$ を考える。また，点 P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は1以下であるとする。次の条件（ⅰ）または（ⅱ）をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

（ⅰ）頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

（ⅱ）点 A，P，B は同一直線上にある。

条件（ⅱ）は，条件（ⅰ）だけだと領域が線分 AB を除くものとなることに対する配慮である。
本題の条件（ⅰ）については，2点 A，B を通る放物線（方程式 $y=ax^2-x-a$）が，頂点の x 座標の絶対値が1以上となる範囲（$-\frac{1}{2}\leqq a<0, 0<a\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で a が変化するとき）に通過する領域として考えればよい。

〔資料 4〕H26 年度入試　東京大学　第 3 問

座標平面上の原点を O で表す。
線分 $y=\sqrt{3}x\,(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x\,(-3\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。
(1)　s を $-3\leqq s\leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。
(2)　D を図示せよ。

線分の通過領域の問題で，図示だけならそれほど難しくないが，(1) で条件をみたす t の最大・最小を s の値で場合分けして求めなければならず，少々面倒。

〔資料 5〕H27 年度入試　京都大学　第 5 問

a, b, c, d, e を正の有理数として整式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$g(x)=dx+e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

$f(x)=(px+q)g(x)+r$ として，$r=0$ を示す。

このとき，$\dfrac{f(n)}{g(n)}=pn+q+\dfrac{r}{dn+e}=h(n)$ とし，

$p=\dfrac{i}{j}$，$q=\dfrac{k}{l}$ （i, j, k, l は正の整数）とすると

$jlh(n)=in+k+\dfrac{jlr}{dn+e}$ は整数であり，$in+k$ も整数であるから，$\dfrac{jlr}{dn+e}$ は整数。

d, e, r の分母の最小公倍数を分子・分母にかけることにより，$\dfrac{R}{Dn+E}$ （D, E, R は正の整数）とすることができる。これが整数であるとき，$R\fallingdotseq 0$ であるならば $Dn+E$ は R の約数でなければならない。
$R\fallingdotseq 0$ のとき R の約数は有限個しかないが，$Dn+E$ は n に整数を代入することで無数の値をとる。よって，$R=0$ でなければならない。

実は，5 つの係数は有理数である必要はなく，実数でも命題が成立する。理系では，係数を実数として出題されている。

〔資料 6〕H26 年度入試　京都大学　第 1 問

$0°\leqq\theta<90°$ とする．x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ.

2 つの 2 次方程式 $x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0$，$x^2+2(\tan\theta)x+3=0$ の判別式を考え，同時に 0 以上にならないことを示せばよい。

〔資料 7〕H27 年度入試　東京大学　第 1 問

以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n, m, l が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。

A は偽。反例は $n=17$ のみ。
これは，関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{26}-x^2+100$ の増減を調べて，

極小となる $x=\dfrac{52}{3}$ 付近の値を n に代入してみると見つけられる。
B は真。証明は等式から l を n, m で表し，不等式から l を消去すればよい。

〔資料 8〕H24 年度入試　京都大学　第 4 問

次の命題 (p)，(q) それぞれについて，正しいかどうか答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.
(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である.
(q)　△ABC と△A′B′C′ において，AB＝A′B′，BC＝B′C′，∠A＝∠A′ ならば，これら 2 つの三角形は合同である.

(p) は真。外接円と中心角を考えればよい。
(q) は偽。偽であることは容易にわかるが，その反例をどう示すのか，表現力が問われる。

〔資料9〕H25 年度入試　京都大学　第3問（文）

n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする． (1)　a と b は整数であることを示せ． (2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

H25 年度入試　京都大学　第3問（理）

n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする．このとき，a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

文系では $x=k$，$k+1$ を代入するところを，理系では $x=1\pm\sqrt{5}$ を代入する。根号が含まれることによって難易度が上がる。理系は n についての数学的帰納法を用いればよい。
互いに素であることの証明は，1 より大きい最大公約数の存在を仮定して，矛盾を導く，背理法を用いればよい。

〔資料10〕H25 年度入試　東京大学　第2問

座標平面上の3点 $\mathrm{P}(0,-\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\sqrt{a^2+1})$ $(0\leqq a\leqq 1)$ を考える。 (1)　2つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。 (2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ に下ろした垂線と直線 $y=2$ の交点を C とする。このとき，線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

実は，A は2点 P，Q を焦点とする双曲線上の点であるから，その性質から $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}=2$ である。
また，放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ は点 Q を焦点とする放物線であるから（準線 $y=-\sqrt{2}$），$\mathrm{QB}=(2+\sqrt{2})-\mathrm{BC}$ がわかり，$\mathrm{AQ}+\mathrm{AB}=\mathrm{QB}$ であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}&=(2+\mathrm{AQ})+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\\&=2+\mathrm{QB}+\mathrm{BC}\\&=2+(2+\sqrt{2})-\mathrm{BC}+\mathrm{BC}\\&=4+\sqrt{2}\end{aligned}$$

3　まとめ

東京大学の入試では、確率と漸化式、図形の通過領域の問題が多く出題されている。解法はセオリー通りだが、式や数値がやや複雑な問題が比較的多い印象を受けた。知識量と、速く正確に数式を処理できる力が問われる。

京都大学の入試では、ベクトル、特に空間ベクトルの問題が出題されることが多く、また、証明問題も比較的多く扱われている。図形や現象をイメージする思考力、適切に文章にする表現力が問われる。

どちらの大学も、微・積分法、相加・相乗平均の利用は確実に押さえておきたい分野であり、出題されたら確実に解答したい。

それぞれの大学の入試問題の特徴を理解することで、東京大学や京都大学を目指す生徒に対するよりよい教科指導に役立てていきたい。

【参考文献】

大学入試シリーズ　東京大学　文科 2016（教学社）
大学入試シリーズ　東京大学　理科 2016（教学社）
大学入試シリーズ　京都大学　文系 2016（教学社）
大学入試シリーズ　京都大学　理系 2016（教学社）