大学入試研究委員会

本研究委員会は，８名の研究委員で構成されています。継続的な研究から発展的な研究まで各分野に分かれて努力を続けてきました。

大学入試センター試験に関してのアンケートにつきましては，県下の受験生や先生方のご協力をいただき，本年度も集計・分析を終え報告する運びとなりました。ありがとうございました。

先生方のご意見，ご指導をいただき，今後の研究活動に生かして生きたいと思いますので，よろしくお願いします。

本年度の研究一覧は以下の通りです。

１　国公立大学入試問題の研究
　－複素数平面に関する問題について－
　愛媛県立宇和島南中等教育学校　川野　星子

２　国公立大学入試問題の研究
　－東京大学・京都大学の入試問題について(文系)－
　愛媛県立　新居浜西　高等学校　吉村　新平

３　平成２７年度愛媛大学入試問題（数学）の研究
　愛媛県立　松 山 南　高等学校　近藤　弘法

４　中四国の国公立大学入試問題の研究
　－ＡＯ・推薦入試の問題から－
　愛媛県立　西　　条　高等学校　関　　聡司
　愛媛県立　松 山 北　高等学校　山田　一貴

５　平成２７年度大学入試センター試験アンケートの分析
　愛媛県立　大　　洲　高等学校　岩村　　崇
　愛媛県立　宇和島東　高等学校　渡邉　弘樹
　愛媛県立　三　　島　高等学校　脇　　智城

国公立大学入試問題の研究

―複素数平面に関する問題について―

愛媛県立宇和島南中等教育学校　川野　星子

１　はじめに

２０１５年度入試は新課程による初年度実施で、複素数平面の出題は多くはないが、基本レベルから発展レベルまでしっかり出題されている。計算主体の代数の分野と図形が主体の幾何の分野への２つの分野への応用があり、いずれも複素数平面だけではなく、幅広い知識が必要である。

２０１５年度入試より香川大学の問題と、２００５年度入試より愛媛大学の問題を本校の自然科学類型（理系）クラスの生徒３４名に解答してもらい、分析をした。

また、２０１５年度入試より、複素数平面に関する問題をいくつか抜粋して紹介する。

２　入試問題の分析結果

２０１５年度　香川大学　問題

複素数平面上に原点Ｏ(0)と点Ａ($1+\sqrt{3}i$)がある。ただし、iを虚数単位とする。このとき、次の問に答えよ。

(1)　複素数$1+\sqrt{3}i$を極形式で表せ。ただし、偏角θは$0 \leq \theta < 2\pi$とする。

(2)　点Ａを原点のまわりに$-\dfrac{\pi}{3}$だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(3)　虚軸上の点Ｂ(z)がＯＢ＝ＡＢを満たすとき、複素数ｚを求めよ。

(4)　(3)で求めたＢ(z)に対して、３点Ｏ、Ａ、Ｂを通る円の中心を表す複素数を求めよ。

ア　正答率（%）

	正解	誤答	無解答
(1)	１００	０	０
(2)	８２	１８	０
(3)	５３	３５	１２
(4)	１８	３８	４４

イ　誤答例

(2)　間違いのほとんどが、$\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin(-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$などのケアレスミスである。

(3)　ｚが純虚数であることに気づくことができない。また、絶対値$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$の計算ができない。

例：ｚ＝xiとする。$OB^2=AB^2$より

$$(xi)^2=\{-1+(x-\sqrt{3})i\}^2$$

※正解は、$x^2=(-1)^2+(x-\sqrt{3})^2$である。

(4)　辺の長さや角の大きさを求めるなど、試行錯誤した後が見られた。 辺OAと辺OBの垂直二等分線の交点が外心であると気がつけば、中心が$x+\frac{\sqrt{3}}{3}i$とおくことができる。

例：中心C（$a+bi$）とすると、

$CO=CA=CB$より$CO^2=CA^2=CB^2$

この後の計算ミスや途中までの解答が目立った。

例：$OB=OD$となる点Dを実軸上にとる。中心Cとすると、$OA\perp BD$となり、点Cは直線BD上であることから点Cは線分BDの中点である。

※正確には、２点B、Cを通る直線と実軸上の交点Dとすると$DA=DO$、$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$

より、△AODは正三角形である。

よって、$OD=2$である。

（つまり、$OB\neq OD$である。）

ウ　所感

(1)、(2)は、教科書の基本的な内容が理解できていれば解ける。ケアレスミスが目立つので焦らず見直しをすれば大丈夫である。

(3)は、点Ｂが虚軸上にあることから、ｚは純虚数であることに気づかなければならない。また、複素数の絶対値についての計算ミスが多いので、練習が必要である。

(4)は、「三角形の外心は、３辺の垂直二等分線が交わる点である。」という性質を利用すると、計算が比較的楽になる。

２００５年度　愛媛大学　問題

複素数$z=x+yi$（x、yは実数）について、次の問いに答えよ。ただし、iは虚数単位である。

(1)　$z^2=1+2\sqrt{2}i$を満たすx、yを求めよ。

(2)　aを正の実数とする。$\begin{cases} z^2=1+ai \\ x<-2 \end{cases}$ を満たすzが存在するためのaの範囲を求めよ。

ア　正答率（％）

	正解	誤答	無解答
(1)	６５	２６	９
(2)	９	４４	４７

イ　誤答例

(1)　数学Ⅱで学習する「複素数の性質」を使って解くことができる。

例：$(x^2-y^2)+2xyi=1+2\sqrt{2}i$

$x^2-y^2, 2xy$はともに実数より

$x^2-y^2=1$、$2xy=2\sqrt{2}$

この後の計算ミスが多い。

また、「iに関する恒等式より」としている解答もあった。ここでは、複素数の相等の考え方を利用しているので、勘違いしないよう注意したい。

例：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$とし、ド・モアブルの定理より　$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

ここから計算ができていない解答がいくつかあった。

(2)　文字を置き換えると２次方程式になることから数学Ⅰで学習した２次関数の考え方を利用することができる。

例：(1)と同様にして、$x^2-y^2=1$、$2xy=a$ が得られる。明らかに$y\neq 0$であることに留意

し、y を消去すると、$4x^4-4x^2-a^2=0$ が得られる。$x^2=t$ とすると、２次方程式

$4t^2-4t-a^2=0$ となる。

この後、２次方程式が実数解を持つから判別式を利用しているが、実際は、$x<-2$ より $t>4$ この範囲で実数解をもつことをいわなければならない。

※正解は、左辺＝ $f(t)$ とすると、$f(4)<0$ となればよい。

※別解は、$y=4t^2-4t$ のグラフと $y=a^2$ のグラフが共有点をもつことから a の範囲を求めることができる。

ウ　所感

⑴は、$x^2-y^2=1$、$2xy=2\sqrt{2}$ から x、y の値を求めることができていない。丁寧な指導が必要であると感じた。

⑵は、文字を置き換えることによって２次関数の問題として考えることができる。２次関数の考え方はいろいろな分野で登場してくるので、しっかり理解させたい。

なお、⑵の解答例として、$a=-2x\sqrt{x^2-1}$ とし、$y=-2x\sqrt{x^2-1}$ のグラフと $y=a$ のグラフの共有点を考えている解答もあった。この場合は数学Ⅲで学習する微分法を用いてグラフの概形を考えることができる。

３　２０１５年度入試問題より抜粋

・岩手大学　前期

複素数 $z=2(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi)$ のとき、z^2, z^{-3} および $\left|z-\frac{1}{z}\right|^2$ を求めよ。ただし、i は虚数単位とする。

・奈良県立医科大学　前期

複素数 α は実数でも純虚数でもないとする。

$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ が実数であるために α の満たすべき必要十分条件を求めよ。

・静岡大学　前期

i は虚数単位、r を１より大きい実数とし、

$\omega=r(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24})$ とおく。また、数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める。

$z_1=\omega, z_{n+1}=z_n\omega^{n+2}$ （$n=1,2,3$・・・）

このとき、次の問いに答えよ。

⑴　z_2 を r を用いて表せ。

⑵　z_n の偏角の１つを n を用いて表せ。

⑶　複素数平面で原点を O、z_n で表される点を P_n とする。$7\leq n\leq 48$ のとき、△ P_nOP_{n+1} が $\angle O=\frac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ。また、そのときの z_n の偏角 θ を $0\leq\theta<2\pi$ の範囲で求めよ。

・東北大学　後期

α、β、γ を複素数として、$f(t)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ とおく。実部と虚部がどちらも整数である複素数全体の集合を R とする。また、i は虚数単位とする。

⑴　次の２つの条件⒜、⒝は同値であることを示せ。

⒜　すべての整数 n に対し、$f(n)$ は R の要素である。

⒝　$2\alpha, \beta-\alpha, \gamma$ はすべて R の要素である。

⑵　x が R の要素ならば、$\frac{x(x+1)}{1-i}$ は R の要素であることを示せ。

⑶　次の２つの条件⒞、⒟は同値であることを示せ。

⒞　すべてのRの要素xに対し、$f(x)$はRの要素である。

⒟　$(1-i)\alpha, \beta-\alpha, \gamma$はすべて$R$の要素である。

・鹿児島大学　前期

次の各問いに答えよ。ただし、iは虚数単位とする。

⑴　方程式$z^4=-1$を解け。

⑵　αを方程式$z^4=-1$の解の一つとする。複素数平面に点βがあって、$|z-\beta|=\sqrt{2}|z-\alpha|$を満たす点$z$全体が原点を中心とする円Ｃを描くとき、複素数$\beta$を$\alpha$で表せ。

⑶　点zが⑵の円Ｃ上を動くとき、点iとzを結ぶ線分の中点ωはどのような図形を描くか。

・一橋大学　前期

座標平面上の原点をOとする。点Ａ（$a,0$）、点Ｂ（$0,b$）および点Ｃが

ＯＣ＝１、ＡＢ＝ＢＣ＝ＣＡ

を満たしながら動く。

⑴　$s=a^2+b^2, t=ab$とする。sとtの関係を表す等式を求めよ。

⑵　△ＡＢＣの面積のとりうる値の範囲を求めよ。

４　まとめ

全体としては、教科書の基本的な内容は解くことができるが、融合問題などの応用となると無解答が目立った。また、解答用紙に、図形をかいていない、あるいは間違った図を描いていた。図形問題においては、図をかくという習慣を普段から身につけさせる必要性を感じた。

新課程入試となり以前の課程の問題も参考にしつつ、今後どのような問題が出題されるのか注目したい。