中･四国の国公立大学入試問題の研究

－ＡＯ･推薦入試の問題から－

愛媛県立北条高等学校　砂田　佳範
愛媛県立西条高等学校　関　　聡司

１　はじめに

四国地区には、５つの国立大学、４つの公立大学が設置されている。中国地方には、５つの国立大学、９つの公立大学が設置されている。国立大学では、約23%、公立大学では、約36%の生徒をAO・推薦入試により学生募集を行っている。私たちが生徒に指導する際、過去問を解かしその傾向を見つけることで対策を講じることができると思う。そのため、昨年度に引き続いて、中四国の国公立大学のAO･推薦入試で出題された数学の問題を取り上げた。

２　平成28年度四国の国公立大学AO・推薦入試問題

愛媛大学　理学部　AO入試Ⅱ

$\boxed{1}$　次の$\boxed{}$に入る数または式を、解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　不定方程式$10x-4y=8$のすべての整数解は

$x=\boxed{ア}n+2,\ y=\boxed{イ}n+\boxed{ウ}$

と表せる。ただし、nは整数である。

(2)　原点$(0,0)$でy軸に接する円が異なる2点$\mathrm{P}(1,3)$,$\mathrm{Q}(a,3)$を通るとき、$a=\boxed{エ}$である。

(3)　1から10までの番号が1つずつ書かれた10枚のカードがある。この中から2枚のカードを同時に選び、選んだカードに書かれた数のうち、小さい方をa、大きい方をbとする。

不等式$\sqrt{a}<n<\sqrt{b}$を満たす自然数nがちょうど1つとなる確率は$\boxed{オ}$である。

(4)　$z^3=-8i$を満たす複素数zのうち、実部が正となるものは$z=\boxed{カ}$である。

(5)　自然数nが$n\geqq 2$を満たすとき、

${}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_2=\boxed{キ}$

が成り立つ。ただし、$\boxed{キ}$はnの多項式である。

(6)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1}x|\log 2x|\,dx=\boxed{ク}$

$\boxed{2}$　次の命題の真偽を判定し、解答用紙に書かれた真または偽のいずれか一方の文字に○を付けよ。さらに、真ならば証明し、偽ならば反例をあげよ。

(1)　a,b,cを実数とするとき、$a+b,\ b+c,\ c+a$がすべて無理数であるならば$a+b+c$も無理数である。

(2)　実数を係数とする3次方程式は少なくとも1つの実数解をもつ。

(3)　正8面体の各辺をそれぞれに1つずつ向きをつけて、ベクトルとして考える。正8面体の辺の数をeとするとき、各辺にどのように向きをつけても、それらe個のベクトルの和は零ベクトルにならない。

(4)　数列$\{a_n\},\{b_n\}$がともに収束する等比数列であるとき、$c_n=a_nb_n(n=1,2,3,\cdots)$で定義される数列$\{c_n\}$も収束する等比数列である。

$\boxed{3}$　平面の$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}=(a_1,a_2)$,$\vec{b}=(b_1,b_2)$のなす角をθとするとき、

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{4}$　関数$f(x)=x\sin x$について、次の問いに答えよ。

(1)　関数$y=f(x)$の導関数$f'(x)$と第2次導関数$f''(x)$を求めよ。

(2)　(ⅰ)　方程式$f'(x)=0$の$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$における解は$x=0$のみであることを示せ。

(ⅱ)　方程式$f''(x)=0$の$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$における解はちょうど2つであることを示せ。

(ⅲ)　関数$y=f(x)$の区間$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$におけるグラフの概形をかけ。

(3)　$f''(x)=0$となる正の実数xの全体を小さい方から順に並べて数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$を定める。

(ⅰ)　不等式$\pi<a_2<\dfrac{3}{2}\pi$を示せ。

(ⅱ)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_{2n})$を求めよ。

高知大学　教育学部　推薦入試Ⅰ

第５問

aは定数とする。2次関数$y=-x^2-4x-2$の$a\leqq x\leqq a+1$における最大値を求めよ。

第６問

$0°\leqq\theta\leqq 180°$とする。$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$のとき、次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$の値を求めよ。

第7問

1個のさいころを3回続けて投げるとき、次の問いに答えよ。

(1)　1の目がちょうど2回出る確率を求めよ。

(2)　出る目の和が10になる確率を求めよ。

(3)　出る目の最小値が3である確率を求めよ。

高知大学　理学部　推薦入試Ⅰ

第1問

昔の人は夜空の星をつないで星座を描いた。皆さんも幼いころ、点を順につないでいくと絵が現れるという「点つなぎ」という遊びをしたのではないだろうか。

座標平面上の点(m, n)が格子点であるとは、そのx座標m、y座標nがともに整数であるときをいう。ここでは、座標平面上の格子点を線分でつないで、正多角形が描けるかどうか考えてみよう。すなわち、格子点を頂点とする正多角形が存在するかどうかを考えてみよう。

まず、格子点を頂点とする正方形が存在することはすぐわかる。実際、m, nを整数としlを0でない整数とすると、4点$(m, n), (m+l, n), (m+l, n+l), (m, n+l)$をこの順で線分で結べば、正方形ができあがる。より具体的な例として4点$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$を頂点とする正方形がある。実は四角形の場合には、平行四辺形であるというだけで、頂点のうちの3個が格子点になれば、残りのひとつの頂点も格子点であると分かってしまう。

次に格子点を頂点とする正三角形の存在について考えてみよう。座標平面上に格子点を頂点とする正三角形ABCがあると仮定する。そのとき、三角形ABCを頂点Aが原点$(0, 0)$になるように平行移動しても、得られた三角形は格子点を頂点とする正三角形となるので、最初から、$\mathrm{A}=(0, 0)$と仮定してよい。m, n, j, kを整数とし、$\mathrm{B}=(m, n)$, $\mathrm{C}=(j, k)$とおく。このとき、頂点Cの座標は頂点Bの座標を用いて、

$$\underline{{}_{(1)}(j, k)=\left(\frac{1}{2}m\mp\frac{\sqrt{3}}{2}n,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{1}{2}n\right)}\quad（複合同順）$$

と表すことができる。<u>(2)　このことより、格子点を頂点とする正三角形は存在しないことが示される。</u>

さらに、格子点を頂点とする正三角形が存在しないことを用いると、格子点を頂点とする正六角形は存在しないことも示される。なぜならば、格子点を頂点とする正六角形が存在すると仮定する。この正六角形のひとつおきの頂点を線分で結ぶと3本の線分が引かれる。その線分で描かれた図形は格子点を頂点とする正三角形である。格子点を頂点とする正三角形は存在しなかったので、これは矛盾である。よって、格子点を頂点とする正六角形は存在しない。

最後に格子点を頂点とする正五角形の存在について考えよう。格子点を頂点とする正五角形が存在すると仮定して、その中で一番小さいものを取ろう。二つおきの頂点を線分で結ぶと5本の線分が引かれる。そこには、より小さな正五角形が現れている。上で述べたように、「平行四辺形の3個の頂点が格子点ならば、残りの頂点も格子点である」が成り立つので、そのより小さな正五角形の頂点はすべて格子点になる。ところが、最初に取った格子点を頂点とする正五角形は一番小さいものとしていたので、格子点を頂点とするより小さな正五角形ができてしまたことは矛盾である。よって、格子点を頂点とする正五角形は存在しない。

問１　下線部(1)のように頂点Cが表されるとき、∠BACは$\dfrac{\pi}{3}$であり、辺ABと辺ACの長さは等しいことを示せ。

問2　下線部(2)を理由をつけて説明せよ。ただし、必要ならば$3\sqrt{3}$が無理数であることを用いてよい。

問3　平行四辺形の3個の頂点が格子点ならば、残りの頂点も格子点であることを示せ。

問4　「格子点を頂点とする正五角形が存在しない」ことを示した上記の証明のやり方は、他の正n角形$(n>5)$の場合にも適用できるかどうか考察し、記述せよ。

第2問

次の文章を読んで、以下の問いに答えよ。

「距離」という言葉は日常でもよく使う。高知駅から高知大学までのタクシーの「走行距離」といえば、いわるゆ「道のり」である。一方で高知駅と高知大学の「距離」は地図上で、その２か所を線分で結び、その線分の長さと地図の縮尺を用いて求める「最短距離」であろう。当たり前のことであるが、最短距離は負でない数である。２箇所のどちらから測ろうと最短距離は変わらない。最短距離が０であれば、同じ場所であるし、その逆も成り立つ。寄り道をすれば、直接行ったよりも短くなることはない。数学における「距離」はこれらの概念を基にして定義される。

座標平面で考えてみよう。座標平面上の２点$P_1=(x_1, y_1)$と$P_2=(x_2, y_2)$に対し、この２点間の距離は

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

で与えられると高校で学んでいる。

高校までは一つの実数を与えたときに、ただ一つの実数が決まる規則を関数と呼んだ。この考えは大学の数学で発展される。

上のようにP_1, P_2という二つの点が与えられた時にただ一つの実数が決まる規則も関数と呼び、たとえば$d(P_1, P_2)$と表記する。

さて、座標平面上の２点P_1, P_2により決まる関数$d(P_1, P_2)$が距離関数であるとは次の４つを満たすこととする。

(ｉ)任意の２点P_1, P_2について$d(P_1, P_2)\geqq 0$

(ⅱ)任意の２点P_1, P_2について$d(P_1, P_2)=d(P_2, P_1)$

(ⅲ)$P_1=P_2$ならば$d(P_1, P_2)=0$、
　　逆に$d(P_1, P_2)=0$ならば$P_1=P_2$

(ⅳ)任意の３点P_1, P_2, P_3について
　　$d(P_1, P_2)\leqq d(P_1, P_3)+d(P_3, P_2)$

このとき、関数の値を座標平面上の２点P_1とP_2の距離と呼ぶ。

上に述べた例に戻ろう。座標平面上の２点$P_1=(x_1, x_2)$と$P_2=(x_2, y_2)$について

$$d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

と定義すると$d(P_1, P_2)$は座標平面上の距離関数となる。(ｉ)

は明らかだろう。(ⅱ)が成り立つことを示すには関数の定義の式をきちんと理解すれば良い。(ⅲ)を満たすことは容易に示せる。(ⅳ)は図を描いてみれば直感的に理解できる。また、(ⅳ)の不等式を三角不等式と呼ぶことも納得できるだろう。これは一番慣れ親しんだ距離関数である。この距離はユークリッド距離と呼ばれる。

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)を満たす関数はみな距離関数と呼ばれる。座標平面上にユークリッド距離と異なる距離関数を定義してみよう。例えば

$$d(P_1, P_2)=\begin{cases}1\ (P_1 \neq P_2\text{のとき})\\ 0\ (P_1=P_2\text{のとき})\end{cases}$$

と定義すれば、これは座標平面上の距離関数となる。

距離を用いて、図形を定義することができる。例えば、１点から等距離にある点の集合として円と呼ばれる図形が定義される。同じ座標平面でも距離関数が異なったときに、座標平面上の集合はどうなるだろうか。距離関数が異なると同じような式で集合を定義しても、見かけがまったく違う集合となることがある。

問１．ユークリッド距離を与える関数$d(P_1, P_2)$が(ⅱ)を満たすことを示せ。

問２．ユークリッド距離を与える関数$d(P_1, P_2)$が(ⅲ)を満たすことを示せ。

問３．$d(P_1, P_2)$が距離関数となることを証明せよ。

問４．$P=(0,0)$とする。$d(P, Q)<\frac{1}{2}$を満たす点Q全体の集合を図示せよ。

問５．$P=(0,0)$とする。$d_1(P, Q)<\frac{1}{2}$を満たす点Q全体の集合を図示せよ。

問６．$P=(0,0)$とする。$d_1(P, Q)<2$を満たす点Q全体の集合を図示せよ。

高知大学　医学部　AO入試Ⅰ　総合問題Ⅰ

Ⅰ　関数$f(x)=x^3-7x+7$とする。このとき、次の設問に答えなさい。

設問1　$y=f(x)$の増減表をかきなさい。

設問2　関数$y=f(x)$のグラフの概形をかきなさい。それを用いて$f(x)=0$は3つの異なる実数解a, b, cで$c<0,\ 1<b<a<2$を満たすものをもつことを説明しなさい。

設問3　$g(x)=x^3 f\left(1+\frac{1}{x}\right)$とする。$g(1), g(2), g(3)$を計算しなさい。それを用いて$g(x)=0$の実数解のうちの2つの解$d, e$は$1<d<2,\ 2<e<3$を満たすことを説明しなさい。

設問4　設問2におけるa, bは設問3におけるd, eを用いて、それぞれ$a=1+\frac{1}{d}, b=1+\frac{1}{e}$とかけることを示しなさい。さらに$\frac{4}{3}<b<\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}<a<2$を満たすことを示しなさい。

Ⅱ　3辺の長さがa, b, cである三角形の面積を$S(a, b, c)$とするこのとき、次の設問に答えなさい。

設問１

余弦定理を用いて、$S(a, b, c)=\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}$であることを示しなさい。ここで、$t=\frac{a+b+c}{2}$とする。

設問2

$a\leqq c$のとき、xが$a\leqq x\leqq c$を満たすならば、$x, b, a+c-x$をそれぞれの辺の長さとする三角形ができることを示しなさい。すなわち、2辺の長さの和は他の1辺の長さより長いことを示しなさい。

設問3

設問2のxについて、$S(a, b, c)\leqq S(x, b, a+c-x)$が成り立つことを示しなさい。また、等号の成立は$x=a$または$x=c$のときに限ることを示しなさい。

Ⅲ　$m>\frac{1}{2}$とする。次の3直線について設問に答えなさい。

$l_1: y=mx-2m+3$

$l_2: y=-\frac{1}{m}x+\frac{2}{m}+3$

$l_3: y=-2x+1$

設問1

l_1とl_2の交点の座標を求めなさい。

設問2

3直線l_1, l_2, l_3で囲まれた三角形の面積を求めなさい。

設問3

3直線l_1, l_2, l_3で囲まれた三角形が二等辺三角形となるmを求めなさい。

高知工科大学　経済･マネジメント群　AO入試

$\boxed{\text{Ⅰ}}$　次の問いに答えよ。

(1)　2016の正の約数の個数を求めよ。

(2)　方程式$|x-2|=1+|x+3|$を解け。

(3)　方程式$x^3+x^2+2x-4=0$の複素数解をすべて求めよ。

(4)　100から999までの整数で、各桁の数が二つ以上同じものの個数を求めよ。

(5)　$4^{\log_2 5}$の値を求めよ。

(6)　$\cos\frac{5\pi}{12}$の値を求めよ。

(7)　$f(x)=x^3+3x^2-9x-4$の極大値を求めよ。

(8)　nを自然数とするとき、$\frac{2n^2+9n+12}{n+2}$の小数部分を求めよ。

(9)　nを0以上の整数とするとき、$_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_n$を求めよ。

(10)　$y=f(x)$上の任意の点$(a, f(a))$から点$(0, 1)$までの距離と、点$(a, f(a))$から点$(a, -1)$までの距離とが等しいとき、$f(x)$を求めよ。

(11)　連立不等式$x^2\leqq y, y\leqq 2x+3, y\leqq -x+6$の表す領域の面積を求めよ。

(12)　p, q, r, s, t は0または1とする。このとき

$$0.78<\frac{p}{2}+\frac{q}{4}+\frac{r}{8}+\frac{s}{16}+\frac{t}{32}<0.80$$

を満たすような(p, q, r, s, t)を1組求めよ。

Ⅱ　関数$f(x)$, $g(x)$を

$f(x)=x^2-1$, $g(x)=\{f(x)\}^2-1$

で定義する。次の各問いに答えよ。

(1)　$g(x)=0$を満たす実数xをすべて求めよ。

(2)　$x>1$, $f(x)=x$を満たす実数xを1つ求めよ。

(3)　$x>1$, $g(x)=x$を満たす実数xを1つ求めよ。

Ⅲ　三角形ABCの3つの角をA, B, Cとし、向かい合う辺の長さをa, b, cとする。このとき、次の3つの命題(P),(Q),(R)のうち、どの2つも互いに同値であることが知られている。その証明を読み、後の設問に答えよ。ただし、証明にあたっては、三角関数の加法定理は既知とする。

(P) $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad \cdots(\text{i})$$

(Q) $$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B & \cdots(\text{ii}) \\ b=c\cos A+a\cos C & \cdots(\text{iii}) \\ c=a\cos B+b\cos A & \cdots(\text{iv}) \end{cases}$$

(R) $$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A & \cdots(\text{v}) \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B & \cdots(\text{vi}) \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C & \cdots(\text{vii}) \end{cases}$$

[証明]　まず(P)⟹(Q)を示す。

与えられた式の値をkとすると

$a=k\sin A$, $b=k\sin B$, $c=k\sin C$

である。よって、

$$\begin{aligned} b\cos C+c\cos B &= k\sin B\cos C+k\sin C\cos B \\ &= k\sin(B+C) \\ &= k\sin(\pi-A) \\ &= k\sin A \\ &= a \end{aligned}$$

である。(あ)<u>よって(ⅱ)が示された</u>。

同様に(ⅲ),(ⅳ)も示される。

よって(P)⟹(Q)が示された。

次に(Q)⟹(R)を示す。

(ⅱ)×a+(ⅲ)×b−(ⅳ)×cをつくると

$$\begin{aligned} a^2+b^2-c^2 &= a(b\cos C+c\cos B) \\ &\quad +b(c\cos A+a\cos C) \\ &\quad -c(a\cos B+b\cos A) \end{aligned}$$

であるが、(い)<u>これは$2ab\cos C$に等しい</u>。

よって、(ⅶ)式が成り立つ(ⅴ),(ⅵ)式も同様である。

よって(Q)⟹(R)が示された。

次に(R)⟹(P)を示す。(ⅴ)より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1-\cos^2 A \\ &= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\ &= \frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2} \end{aligned}$$

である。この式の分子は

(う)<u>$(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+b-c)$と因数分解できるの</u>で

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(2abc)^2}$$

が成り立つ。この右辺はa, b, cの対称式だから

(え)<u>$\dfrac{\sin^2 A}{a^2}=\dfrac{\sin^2 B}{b^2}=\dfrac{\sin^2 C}{c^2}$が成り立つ。</u>

よって

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

が成り立つ。よって(R)⟹(P)が示された。

以上により(P)⟹(Q),(Q)⟹(R),(R)⟹(P)が成り立つことが分かったので、(P)(Q)(R)から任意の2つを選んだとき、(お)それらは互いに同値である。(証明終了)

[設問]

(1)　下線部(あ)と同様にして、(ⅲ)が成り立つことを示せ。

(2)　下線部(い)を確かめなさい。

(3)　下線部(う)を確かめなさい。

(4)　下線部(え)について

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}$$

が成り立っていることを確かめなさい。

(5)　下線部(お)の理由分かりやすく説明しなさい。

(6)　上の証明では{(ⅱ)かつ(ⅲ)かつ(ⅳ)}ならば(ⅶ)であることが示されたが、{(ⅱ)かつ(ⅲ)かつ(ⅶ)}ならば(ⅳ)であることを示せ。

(7)　{(ⅱ)かつ(ⅲ)かつ(ⅶ)}は(P)(Q)(R)のいずれとも同値である理由を分かりやすく説明しなさい。

3　まとめ

大学では生徒が高等学校教育で身に付けた「生きる力」「確かな学力」をいかに大学教育で発展･向上させ、社会へと送り出せるよう指導をしている。そのため、大学の入り口段階で求められる力を多面的･総合的に評価するという、個別選抜本来の役割が果たせるものとして、各大学ともアドミッションポリシーに基づく、入学者選抜を行っている。

27年度と28年度のAO入試、推薦入試の問題を比較すると、概ね同じ単元の内容で出題をしているようである。各大学とも筆記試験においては、数学的な見方や考え方を問う問題や基礎･基本が問われる問題や読解力が試される問題が出題される傾向となっている。また、教科書に載っている定理の証明なども出てきており、普段から教科書の内容の理解に努めることが必要であると感じる。

今後、生徒の進路実現に向けてさらに研究をしていきたい。

４　平成 28 年度中国地方の国公立大学 AO 入試問題

広島大学　理学部　数学科
AO 入試総合評価方式　筆記試験問題

［１］関数 $f(t)=\cos 2t\cos t$， $g(t)=\cos 2t\sin t$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2\right)^3=\left(\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2\right)^2$$

(2)　$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，$|f(t)|=|g(t)|$ を満たす t をすべて求めよ。

(3)　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{2\pi}\{f(t)g'(t)-g(t)f'(t)\}dt$$

［２］平面上の平行四辺形 OACB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$， $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。対角線 AB 上の点 D をとり，辺 OA， OB 上にそれぞれ点 E， F を ED と OB が平行， FD と OA が平行となるようにとる。ただし， D は A， B とは異なるとする。また， BE と AF の交点を S とする。 $\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=p:(1-p)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$， $\vec{b}$， p を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$， $\vec{b}$， p を用いて表せ。

(3)　点 D が対角線 AB 上のどの位置にあっても，３点 C， D， S は一直線上にあることを示せ。

［３］以下の問いに答えよ。

(1)　x， y は実数とする。

t の２次方程式 $t^2-xt+y=0$ が実数解をもつような点 (x,y) の集合を座標平面に図示せよ。

(2)　次の連立不等式が表す領域を D とする。

$$a^2+b^2\leqq 1,\quad a>0,\quad b>0$$

点 (a,b) が領域 D 内を動くとき， $x=a+b$， $y=ab$ によって定まる点 (x,y) の集合を座標平面に図示せよ。

(3)　点 (a,b) が (2) の領域 D 内を動くとき，

$\log_2 a+\log_2 b-\log_2(a+b)$ の最大値を求めよ。ただし， $\log_2 a$ は 2 を底とする a の対数である。

［４］ $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ とする。ただし， e は自然対数の底である。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(2)　関数 $y=g(x)$ のグラフは直線 $y=\dfrac{1}{2}$ に関して関数 $y=f(x)$ のグラフと対称であるとする。このとき， $g(x)$ を求めよ。

(3)　n を正の整数， $g(x)$ を (2) で与えられた関数とする。曲線 $y=f(x)$， $y=g(x)$ および直線 $x=n$ で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。

(4)　(3) の S_n について $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$ を求めよ。

［５］ n を３以上の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする。 n 人がじゃんけんを１回するとき，勝者が k 人である確率を求めよ。

(2)　n 人がじゃんけんを１回するとき，あいこにならない確率を求めよ。

(3)　n 人がじゃんけんをする。１回目ではあいこになり，２回目で勝者が１人となる確率を求めよ。

(4)　n 人がじゃんけんをする。１回目ではあいこにならずに勝者が２人以上となり，１回目の勝者だけで２回目のじゃんけんをしてその勝者が１人となる確率を求めよ。

広島大学　理学部　物理科学科
AO 入試総合評価方式　筆記試験問題（抜粋）

［１］以下の設問に答えよ。解答欄には導き方も記述せよ。

問１　次の微分積分に関する問いに答えよ。

(1)　$\log(\sin^2 x)$ を微分せよ。（log は自然対数）

(2)　不定積分 $\int\cos^2 x\,dx$ を求めよ。

問２　数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1}=a_n+2n+3$ $(n=1,2,3,\ldots)$ を満たしている。

$a_1=4$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

問３　方程式 $2xy+3x+4y=24$ を満たす負ではない整数 x， y $(x\geqq 0, y\geqq 0)$ の組をすべて求めよ。

問４　楕円 $2(x-2)^2+y^2=8$ と直線 $y=m(x-8)$ が異なる２点 A， B で交わるときの線分 AB の中点の軌跡を考える。

(1)　交点の x 座標を表す方程式を書き，楕円と直線が異なる２点で交わる m の範囲を求めよ。

(2)　線分 AB の中点の軌跡を表す曲線の方程式と x と y の範囲を求めよ。

広島大学　工学部　第二類（電気・電子・システム・情報系）　AO 入試総合評価方式　小論文問題（抜粋）

問題２　本問は，下記の設問に対する解答を通して数学に関する基礎学力，論理的思考力と独創性をみる小論文の問題である。このことに留意し，以下の問いに答えよ。

(1)　空間において，平面を表す方程式について，下の枠内の語句すべてと数式および図を用いて６行以内で説明せよ。

ベクトル，垂直，内積

(2)　空間において，平面と内積とを用いて解く独創的な数学の問題を作成せよ。問題は複数の小問から構成されていても構わない。

(3)　(2)で作成した問題に対する模範解答を示せ。

広島大学　教育学部　第二類（科学文化教育系）
数理系コース　AO 入試総合評価方式　筆記試験問題

［Ｉ］△ABCの辺AB上に２点Ａ，Ｂと異なる点Ｌをとり，辺BC上に２点Ｂ，Ｃと異なる点Ｍをとり，辺CA上に２点Ｃ，Ａと異なる点Ｎをとる。$\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}+\overrightarrow{\mathrm{CL}}=\vec{0}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}+\overrightarrow{\mathrm{CL}}=\vec{0}$ であることは，

$$\mathrm{BM}:\mathrm{BC}=\mathrm{CN}:\mathrm{CA}=\mathrm{AL}:\mathrm{AB}$$

であるための必要十分条件であることを示せ。

(2)　△ABCの面積をSとする。△LMNの面積が最小になるとき，△LMNの面積をSを用いて表せ。

［Ⅱ］　次の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とするとき，次のことが成り立つことを示せ。

$$n \geqq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

(2)　数列$\{c_n\}$を　$c_1 = 0$，

$$\frac{c_{n+1}}{n+2} - \frac{c_n}{n} = \frac{1}{n(n+2)} \quad (n=1,2,3,\ldots) \text{ で定める。}$$

（ｉ）数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

（ii）数列$\{c_n\}$の初項から第n項までの和S_nを求めよ。

（iii）$T_n = \dfrac{S_n}{n}$ とするとき，

極限値　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{T_{n+1}}-\sqrt{T_n}\right)$　を求めよ。

［Ⅲ］　次の問いに答えよ。

(1)　nは自然数とする。$a_1, a_2, \ldots, a_n$が実数のとき，

不等式　$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqq n\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots+a_n{}^2\right)$

が成り立つことを示せ。ただし必要があれば，実数a，bに対して$2ab \leqq a^2+b^2$が成り立つことを用いてよい。

(2)　関数$f(x)$は閉区間$[a,b]$で連続で，常に$f(x) \geqq 0$とする。区分求積法の考え方を用いて，不等式

$$\left\{\int_a^b f(x)dx\right\}^2 \leqq (b-a)\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

が成り立つことを示せ。

(3)　自然数nに対して　$S_n = \displaystyle\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)\pi x)\right| dx$

とするとき，不等式$S_n < \dfrac{n}{\sqrt{2}}$が成り立つことを示せ。

５　平成 28 年度中国地方の国公立大学推薦入試問題

岡山大学　環境理工学部　環境数理学科
推薦入試Ⅱ　小論文（抜粋）

第１問　以下の問いに答えなさい。

問１　関数$f(x)$に対する導関数は

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \cdots(1)$$

と表される。式(1)に基づき，微分可能な二つの関数$f(x)$，$g(x)$に対し

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \cdots(2)$$

が成り立つことを示しなさい。

問２　式(1)に基づき，微分可能な関数$g(x)$に対し

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \qquad \cdots(3)$$

が成り立つことを示しなさい。ただし，$g(x) \neq 0$とする。

問３　式(2)と(3)を用いて，微分可能な二つの関数$f(x)$，$g(x)$に対し

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \qquad \cdots(4)$$

が成り立つことを示しなさい。ただし，$g(x) \neq 0$とする。

第２問　以下の問いに答えなさい。

問１　次の不定積分を求めなさい。

$$\int \log x dx$$

問２　kを自然数とする。次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_k^{k+1} \log x dx \leqq \log(k+1)$$

問３　nを自然数とする。等式

$$\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n = \log(n!)$$

が成り立つことに注意して，次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$n\log n - n + 1 \leqq \log(n!) \leqq n\log n$$

島根大学　総合理工学部　数理・情報システム学科
推薦入試Ⅰ　小論文

問題１　次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で，0 でない複素数 z_1，z_2 の極形式を

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

とする。次が成り立つことを示せ。

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を示せ。
さらに等号が成立する条件を求めよ。

(3) 三角関数の加法定理を用いて，

$$\sin(a+b) - \sin a = 2\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2}$$

を示せ。

問題２　s を実数，t を正の数とし，平面上の三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ は
$\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t$，$\mathrm{AC}=2$ および $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ を満たすものとする。点 P，Q を

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (s-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めよ。

(2) $t=1$ のとき，$\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$ となるための s の値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PAQ}<90^\circ$ がすべての s に対して成り立つような t の範囲を求めよ。

問題３　次の問いに答えよ。

(1) 微分可能な２つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積で表される関数 $f(x)g(x)$ は微分可能で，その導関数が次の等式を満たすことを導関数の定義にしたがって示せ。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(2) 微分可能な３つの関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ の積で表される関数 $f(x)g(x)h(x)$ の導関数が次の等式を満たすことを示せ。

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

(3) 導関数の定義にしたがって $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ を微分せよ。

問題４　$f(x)=\dfrac{(\log x)^2}{x}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めよ。

(2) $x>1$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x>1$ における曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べよ。

島根大学　総合理工学部　機械・電気電子工学科
推薦入試Ⅰ　小論文（抜粋）

課題１　曲線 $y=x^3+2x^2+ax-6$ が点 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$ を通るとき，以下の設問に答えよ。

(1) 定数 a を求めよ。

(2) 点 A 以外の x 軸との交点 $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},\ 0)$，$\mathrm{C}(x_\mathrm{C},\ 0)$ を求めよ。ただし，$x_\mathrm{B}<x_\mathrm{C}$ とする。

(3) 曲線と線分 AB に囲まれた部分の面積 S_1 を求めよ。

(4) 曲線と線分 BC に囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ。

(5) 点 A における接線の方程式を求めよ。

(6) 点 A における接線が曲線と再び交わる点 D の座標を求めよ。

(7) 曲線と線分 AD に囲まれた部分の面積 S_3 と三角形 ACD の面積 S_4 のどちらが大きいか理由と共に述べよ。

６　まとめ

AO 入試と推薦入試の問題の中で数学の内容に関わるものを取り上げた。内容としては，「関数」を中心に，数学Ⅱ，数学Ｂや数学Ⅲなどの中から幅広く出題されていた。特に今年度は，定義にしたがって計算させる問題や，公式の成り立ちを問う問題が目立ったように思う。基本的な問題に加え，このような，教科書に出てくる公式の証明などもしっかりと押さえる必要がある。また，ここには載せられなかったが，岡山大学の推薦入試Ⅱの小論文の問題として，箱ひげ図や散布図から読み取れることを説明させる問題もあった。単純な数学の知識に加え，数学を用いて論理的に説明ができる力が求められている。

また，昨年度との比較をすると，AO 入試や推薦入試で数学の内容に関するものを出題する大学・学部は例年と変化はないように思える。生徒の志望する大学の問題傾向を把握し，11 月頃の受験でこのような２次試験レベルの力が身に付けさせられるよう今後も研究を重ねたい。