国公立大学入試問題の研究

－定積分と不等式－

愛媛県立松山東高等学校　　松　浦　　　正

1　はじめに

積分法の導入をするとき，いつも考えることがある。それは，高校で使用している教科書の学習内容の順序が，不定積分→定積分→面積→区分求積法となっていることである。これは，歴史的に積分法が成立・発展してきた順序とは異なっている。本来なら，ある図形の面積を求めていく手法を考えていく中で定積分の考えを導き，生徒たちに学習していることへの動機付けを与えていくことが導入時の理想である。しかしながら，私自身も面積のような極限を用いた概念を必要とする指導ではなく，「微分の逆計算＝不定積分」といった導入をしたり，面積との関係性は後で学習しても違和感はないだろうと思ってしまったりすることが多いのが現状である。

本研究では，積分法に関する大学入試の過去問の中で，図形の面積に着目した不等式の解法を研究していくことにする。実際，定積分と面積の関連性は，不等式問題などで多く取り上げられる内容である。複雑な式変形や計算が必要な解法の中で，グラフや図形を用いた視覚的イメージがもてた方が理解しやすくなり，学習意欲が上がることも予想される。そこで，定積分と面積の関連性および微分法と積分法の関連性に着目しながら種々の不等式の解法パターンを分析し，今後の指導に役立てていきたいと思い，この研究テーマを設定した。

2　定積分の定義

関数 $f(x)$ の定義域内にある閉区間 $[a,\ b]$ を $n-1$ 個の点 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ によって，幅が $\varDelta x_1, \varDelta x_2, \cdots, \varDelta x_n$ の小区間に分ける。この小区間のおのおのに任意に1つずつ点 t_k をとり，t_k における関数の値に対応する区間の幅 $\varDelta t_k$ を掛けたものの総和

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\varDelta t_k = f(t_1)\varDelta t_1 + f(t_2)\varDelta t_2 + \cdots\cdots + f(t_n)\varDelta t_n \quad \cdots\cdots \boxed{\text{A}}$$

を作る。ここで，n を大きくして **$\varDelta x$ の最大値 → 0** となるようにさえすれば，どのような分割の仕方から出発し，各小区間から t_k をどのように選ぼうとも $\boxed{\text{A}}$ は一定の値に収束することがある。

このとき，関数 $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で積分可能であるといい，この極限値を

$$\boxed{\lim_{\varDelta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\varDelta x = \int_a^b f(x)\,dx \quad (\varDelta x = max\,\varDelta x_k)}$$

と表し，関数 $f(x)$ の a から b までの定積分と定義する。

3　大学入試問題の分析

＜２０１４　北海道大学　後期　理・工学部＞

(1)　すべての正の実数 x に対して不等式 $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ が成立するような実数 a のうちで最大となるものを求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ。

(3)　円周率 π と $\log 27$ の大小を判定せよ。ただし，　$\log x$ は x の自然対数とする。

【解法の分析】

(1)　$x^2+1>0$ であるから

$$\frac{a}{x^2+1} \leqq \frac{1}{x} \iff a \leqq x + \frac{1}{x}$$

よって，すべての正の実数 x に対して，$a \leqq x + \dfrac{1}{x}$ が成り立つような実数 a のうちで最大となるものを求めればよい。

$\boxed{\text{解法A}}$ … 相加平均と相乗平均の大小関係の利用

$x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ だから，　$x + \dfrac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$

等号が成立は，$x>0$ かつ $x=\dfrac{1}{x}$，すなわち $x=1$ のときで求める a の値は　$a=2$

$\boxed{\text{解法B}}$ … 関数の最小値を利用

関数 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\ (x>0)$ の増減を調べると，$x=1$ のとき最小値2をとることがわかる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2	↗

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

(2)　置換積分法によって計算をする。

$x = \tan\theta$ とおくと　$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{4} \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$$

(3)　(1), (2) の結果から定積分と面積の関係性を利用して不等式の証明につなげていけばよい。なお，下の解答の① は，グラフや面積を利用するとわかりやすい。

＜定積分と不等関係＞
区間 $[a,\ b]$ で，$f(x)$，$g(x)$ がともに連続であるとき
$f(x) \geqq g(x)$　ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$
等号は，常に $f(x)=g(x)$ であるときに限り成り立つ。

(1) の結果より，等号は常には成り立たないから

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{x^2+1}dx < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x}dx \quad \cdots\cdots ①$$

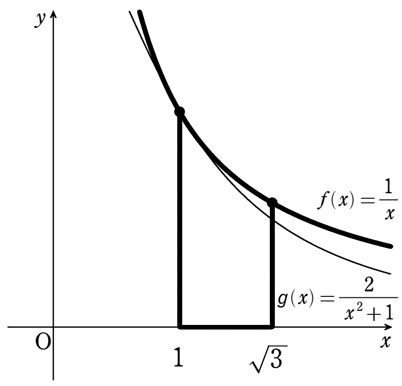
(2) から　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{x^2+1}dx = 2\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

また　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x}dx$

$= \Big[\log|x|\Big]_1^{\sqrt{3}}$

$= \log\sqrt{3}$

$= \dfrac{1}{2}\log 3$



よって，$\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{1}{2}\log 3$

すなわち　$\pi < 3\log 3 = \log 27$

＜２０１５　九州大学　前期　理科系学部＞
(1)　関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。
(2)　不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。
(3)　n を 3 以上の整数とするとき，不等式 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

【解法の分析】

(1)　導関数 y' の符号を調べ，区間 $x>1$ において $y'<0$ を示す。商の微分公式を用いて計算がきちんとできるかどうかを問う問題である。

$$y' = -\frac{(\log x)^2 + x\cdot(2\log x)\cdot\dfrac{1}{x}}{x^2(\log x)^4} = -\frac{(\log x)^2+2\log x}{x^2(\log x)^4}$$

$x>1$ のとき，$\log x>0$ であるから

$$\frac{(\log x)^2+2\log x}{x^2(\log x)^4} > 0$$

よって，$x>1$ において　　$y'<0$

ゆえに，$y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少する。

(2)　置換積分法の公式

$\boxed{\displaystyle\int\{f(x)\}^{\alpha}\cdot f'(x)dx = \frac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C}$ を用いて計算をする。

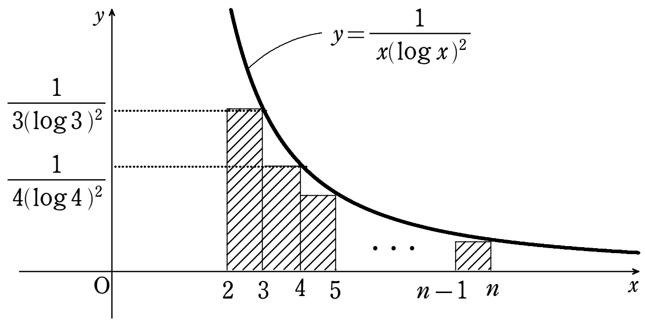
$$\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx = \int\frac{(\log x)'}{(\log x)^2}dx$$

$$= -\frac{1}{\log x}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)　$\boxed{\text{A＜Bの証明を，A＜C＜B から示すパターン}}$

(1) から，$y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少するので，左辺にある和の極限の式は，下の図の斜線部分の面積の和に等しくなる。これを利用して不等式

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2} < \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2}dx \quad \cdots\cdots ① \quad \text{を導く。}$$



(2) から　$\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \Big[-\frac{1}{\log x}\Big]_2^n$

$$= \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log n}$$

$n \geqq 3$ より，$\dfrac{1}{\log n} > 0$ であるから

$$\int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2}dx < \frac{1}{\log 2}$$

よって，① から　　$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$

＜２０１０　東京大学　前期　理系＞
(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。
$\displaystyle\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$
(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。
$\displaystyle\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$

(1)　$\boxed{\text{解法A}}$ … 定積分の不等関係を用いて証明する。

$k>0$ であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\frac{1-x}{k+1} \leqq \frac{1-x}{k+x} \leqq \frac{1-x}{k}$$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+1}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k}dx$

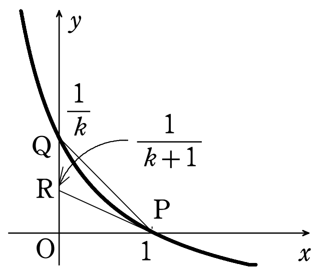
ここで　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+1}dx=\frac{1}{k+1}\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2(k+1)}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k}dx=\frac{1}{k}\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2k}$

ゆえに　$\displaystyle\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$

$\boxed{\text{解法 B}}$ … 面積を利用して証明する。

$y=\dfrac{1-x}{k+x}$ のグラフは $x=-k$，$y=-1$ を漸近線にもつ双曲線である。したがって，$x>-k$ において，減少関数で，グラフは下に凸である。この双曲線上の点 P(1，0) における接線 PR を考えると右の図のようになる。

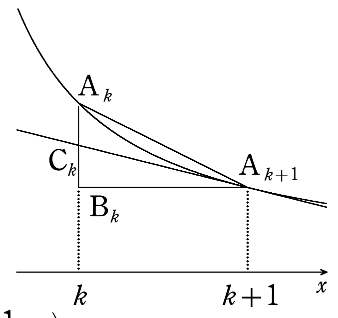


したがって

$$(\triangle\text{OPR の面積})<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx<(\triangle\text{OPQ の面積})$$

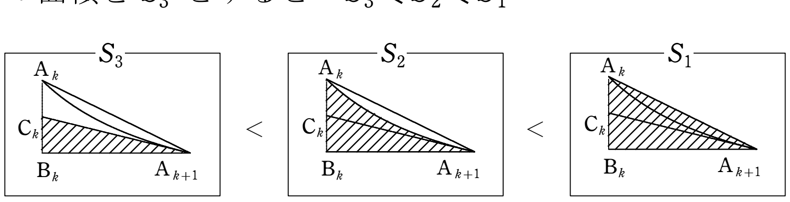
よって　$\displaystyle\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$

(2)　この問いも面積を用いた解法が視覚的にも理解しやすいと考えられる。$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ上で，x 座標が k，$k+1$ である点を考え，それぞれ A_k，A_{k+1} とおく。



$$\mathrm{A}_k\left(k,\ \frac{1}{k}\right),\ \mathrm{A}_{k+1}\left(k+1,\ \frac{1}{k+1}\right)$$

また，点 $\left(k,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$ を B_k，$y=\dfrac{1}{x}$ の A_{k+1} における接線と直線 $x=k$ の交点を C_k とする。このとき，$\triangle\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_k$ の面積を S_1，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $x=k$，$y=\dfrac{1}{k+1}$ で囲まれる部分の面積を S_2，$\triangle\mathrm{C}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_k$ の面積を S_3 とすると　$S_3<S_2<S_1$



この面積の大小関係から，不等式

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

が導かれる。$\dfrac{1}{k+2}<\dfrac{1}{k+1}$ であるから

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

各辺について，$k=n$，$n+1$，……，$m-1$ における値の和を考える。

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$
$$=\frac{m-n}{2mn}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\left(\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\log\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\cdots\times\frac{m}{m-1}\right)-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}$$
$$=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

したがって

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

＜２０１５　富山大学　前期　医・薬学部＞

(1)　関数 $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続であり，区間 $(a,\ b)$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする。さらに，区間 $(a,\ b)$ で $f''(x)<0$ が成り立つとする。$y=g(x)$ を 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を通る直線の方程式とするとき，区間 $(a,\ b)$ で常に $f(x)>g(x)$ であることを示せ。

(2)　n を 2 以上の自然数とするとき，$j=1$，2，……，$n-1$ について

$$\frac{\log j+\log(j+1)}{2}<\int_j^{j+1}\log x\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3)　n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{n!(n-1)!}<n^n e^{-n+1}$$

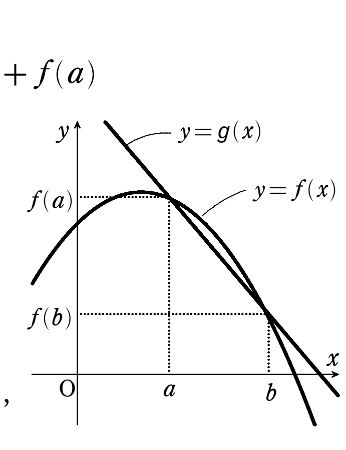
【解法の分析】

(1)　$g(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$\displaystyle\quad=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$h''(x)=f''(x)$

区間 $(a,\ b)$ で $f''(x)<0$

すなわち $h''(x)<0$ であるから，

$h'(x)$ は単調に減少する。

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続であり，区間 $(a,\ b)$ で微分

可能であるから，平均値の定理より，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$　を満たす実数 c が存在する。

この c に対して

$h'(c)=0$

区間 $(a,\ b)$ において

$h'(x)$ は単調に減少するから，$a \leqq x \leqq b$

における $h(x)$ の増減表は右のようになる。

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	極大	↘	0

したがって，区間 $(a,\ b)$ で常に　$h(x)>0$

ゆえに　$f(x)>g(x)$

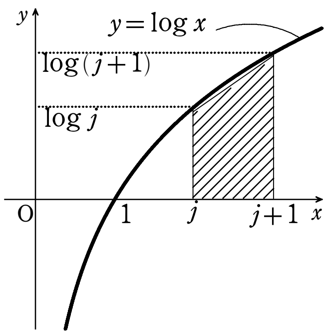
(2)　$f(x)=\log x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

よって，$x>0$ で $f''(x)<0$ が成り立つ。

ここから，(1) の結果から，

$f(x)=\log x$，$a=j$，$b=j+1$ とすると，

区間 $(j,\ j+1)$ で　$f(x)>g(x)$



$j \geqq 2$ のとき，右図で示したように，$\displaystyle\int_j^{j+1} g(x)\,dx$ は右の図の斜線部分の台形の面積になるから

$$\int_j^{j+1} g(x)\,dx<\int_j^{j+1} f(x)\,dx \cdots ①$$

$$\int_j^{j+1} g(x)\,dx=\frac{1}{2}\{\log j+\log(j+1)\}\cdot 1$$

$$=\frac{\log j+\log(j+1)}{2} \cdots ②$$

$j=1$ のとき，$\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$ は底辺の長さが 1，高さが $\log 2$ の三角形の面積になるので

$$\int_1^2 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\log 2=\frac{\log 2}{2}$$

よって，② は $j=1$ のときも成り立つから

$\dfrac{\log j+\log(j+1)}{2}<\displaystyle\int_j^{j+1}\log x\,dx$　が証明できる。

(3)　(2) で証明した不等式の真数部分に着目し，解き方の見通しが立てられるかどうかがポイントである。特に，Σ記号と対数の性質を利用した式変形は普段の問題演習でも扱うことはあるが，定着度があまりよくない部分である。変形過程の途中式もできるだけ省略せず，丁寧な解答を作成するようにしっかり時間をかけて指導をする必要がある。

(2) から

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\log j+\log(j+1)}{2}<\sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}\log x\,dx$$

すなわち

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\log j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\log(j+1)<\int_1^n\log x\,dx \quad \cdots\cdots ③$$

ここで

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\log j=\frac{1}{2}\{\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log(n-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\log(n-1)!=\log\sqrt{(n-1)!}$$

同様に考えて　$\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\log(j+1)=\log\sqrt{n\,!}$

$$\int_1^n\log x\,dx=\int_1^n(x)'\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_1^n-\int_1^n x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=n\log n-\int_1^n dx=n\log n-\Big[x\Big]_1^n$$

$$=n\log n-n+1=\log n^n+\log e^{-n+1}$$

$$=\log n^n e^{-n+1}$$

よって，③ から

$\log\sqrt{(n-1)!}+\log\sqrt{n\,!}<\log n^n e^{-n+1}$

すなわち　$\log\sqrt{n\,!(n-1)!}<\log n^n e^{-n+1}$

> ＜対数関数の性質＞
> 関数 $y=\log_a x$ について
> $a>1$ のとき，$p<q \iff \log_a p<\log_a q$
> $0<a<1$ のとき，$p<q \iff \log_a p>\log_a q$

対数の性質から，底 e は 1 より大きいので

$\sqrt{n\,!(n-1)!}<n^n e^{-n+1}$

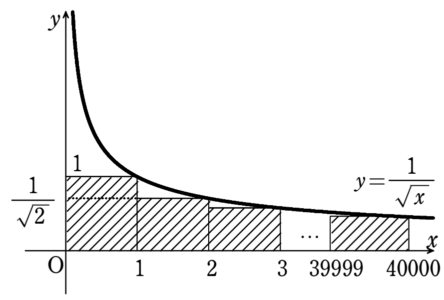
次の問題は，定積分と不等式に関する問題であるが，柔軟な思考力・発想力が問われる問題である。

> ＜２０１４　大阪大学　前期　理系学部＞
> $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

【解法の分析】

直接面積を求めさせる問題ではないが，関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフの概形をつかみ，Σ 記号から下図に示したような有限個の四角形の面積和という発想が出てくれば考えやすい問題である。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{40000}}$ は，次の図の斜線部分の面積の和に等しい。

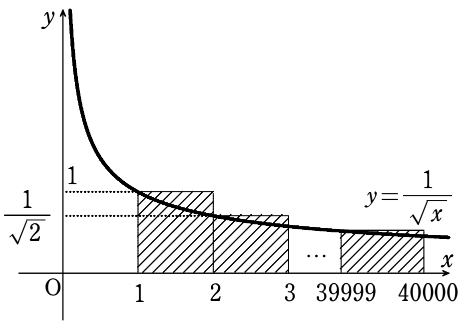


上図から $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{40000}}<\displaystyle\int_1^{40000}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{40000}=399\cdots ①$$

また，下図から

$$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{39999}}$$



$$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{\sqrt{40000}}=398+\frac{1}{200}\cdots ②$$

①，② から　　$398+\dfrac{1}{200}<\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\dfrac{1}{\sqrt{n}}<399$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は　398

次に，定積分によって無限級数の和を求める問題をいくつか取り上げてみた。

＜２０１６　三重大学　前期　医学部　医学科＞
n を自然数とし、
$P_k\left(\dfrac{k}{n},\ \log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right)$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$　を平面上の $n+1$ 個の点とする。
ただし，$\log x$ は x の自然対数である。
(1)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ のとき，点 P_{k-1} と点 P_k との距離に対して

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}<P_{k-1}P_k<\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2}}$$

を示せ。
(2)　$L_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}P_k$ としたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n$ を求めよ。

【解法の分析】
(1)　2 点間の距離の公式を用いて計算をしていく。
このとき，証明したい不等式に含まれる $\dfrac{1}{n}$ を式変形の中で作れるかが前半の鍵となる。
後半は，関数 $f(x)=\log(1+x)$ を設定し，平均値の定理を利用していかなければならないため，かなり難易度の高い問題である。

＜平均値の定理＞
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

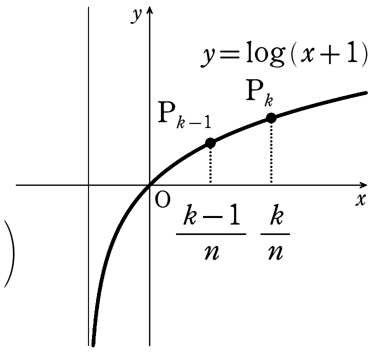
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(a<c<b)$$

を満たす実数 c が存在する。

$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ のとき

$P_k\left(\dfrac{k}{n},\ \log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right)$

$P_{k-1}\left(\dfrac{k-1}{n},\ \log\left(1+\dfrac{k-1}{n}\right)\right)$



$P_{k-1}P_k$

$$=\sqrt{\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)^2+\left\{\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-\log\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2}$$

$$=\frac{1}{n}\sqrt{1+\left\{\frac{\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-\log\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right\}^2}$$

ここで，$f(x)=\log(1+x)$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

平均値の定理より

$$\frac{\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-\log\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+c}$$

を満たす定数 c $\left(\dfrac{k-1}{n}<c<\dfrac{k}{n}\right)$ が存在する。

よって，

$$\frac{1}{1+\frac{k}{n}}<\frac{\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-\log\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}<\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}$$

ゆえに，

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}<P_{k-1}P_k<\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2}}$$

(2)　(1) で証明する不等式に含まれる $\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{k}{n}$ および (2) で問われている和の極限の形から区分求積法を利用すればよいことは予測しやすいと思われる。しかし，その後の置換積分法を 2 回用いた定積分の計算が複雑であること，さらに，はさみうちの原理を使って証明を行うことを考えると，演習不足の生徒にとっては完答は難しいかもしれない。

＜区分求積法＞

関数 $y=f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続かつ常に $f(x)\geqq 0$ とし，さらに，閉区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その両端と分点を順に

$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n=b$ とする。

$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ とおくと，$x_k=a+k\Delta x$ となるので

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x \quad \cdots ①$$

が成り立つ。$a=0,\ b=1$ とすると，

$\Delta x=\dfrac{1}{n}$，$x_k=\dfrac{k}{n}$ となるので

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \cdots ②$$

が導かれる。

＜定積分による無限級数の和の求め方＞

① 級数の第 n 部分和を $\dfrac{1}{n}$ でくくる。

② $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ または $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形に変形する。

③ $\dfrac{k}{n}$ を x に変えた関数 $f(x)$ を 0 から 1 まで積分する。

(1) より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}<\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{(1+x)^2}}\,dx$$

よって，$1+x=\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\tan\alpha=2$ とおくと

x	$0\to 1$
θ	$\frac{\pi}{4}\to\alpha$

$$\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{(1+x)^2}}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta}$$

さらに，$\cos\theta=t$ とおくと　$-\sin\theta\, d\theta=dt$

$\tan\alpha=2$ より　$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=5$

$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

θ	$\frac{\pi}{4}\to\alpha$
t	$\frac{1}{\sqrt{2}}\to\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta}$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{-dt}{(1-t^2)t^2}=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)+\frac{1}{t^2}\right\}dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\log(2\sqrt{2}+2)-\log(\sqrt{5}+1)+\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\log(2\sqrt{2}+2)-\log(\sqrt{5}+1)+\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

最後に，級数の和の考え方や区分求積法による計算と確率の融合問題を紹介する。

＜２０１３　横浜市立大　前期　国際総合科学部＞

n 個のボールと，1 から n までの番号がふられた n 個の空の箱がある。また，1 から n の番号が書かれた n 枚のカードが袋の中に入っている。いま，以下の手順に従いボールを箱の中に入れていくことを考える。

手順１　袋からカードを 1 枚無作為に取り出して，手順 2 に進む。

手順２　手順 1 で取り出したカードに書かれている番号の箱が，空ならばそこにボールを 1 個入れ て，手順 3 へ進む。空でなければカードを元に戻さず手元に置き，手順 1 に戻る。

手順３　手元のすべてのカードを袋に戻す。この時点で，すべての箱にボールが入っていれば終了する。空の箱が1つでもあれば，手順 1 に戻る。

また，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k-1$ 個目のボールを箱に入れ終わった状態(ただし，$k=1$ のときは，はじめの状態とする)の後に，

・次のボール，すなわち k 個目のボールを箱に入れるまでにちょうど i 枚のカードを袋から取り出す確率を $P_k(i)$ とし，

・ i 枚のカードを袋から取り出してもまだ次のボールを箱に入れることができない確率を $Q_k(i)$ とする。

ただし，$Q_k(0)=1$ とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=4$ のとき，$P_3(1)$，$P_3(2)$，$Q_3(2)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　$Q_k(i)$ を $P_k(i+1)$，$P_k(i+2)$，……，$P_k(k)$ を用いて表せ。ただし，$0 \leqq i \leqq k-1$ とする。

(3)　$k-1$ 個目のボールを箱に入れてから k 個目のボールを箱に入れるまでに袋から取り出すカードの枚数の期待値 E_k は

$$Q_k(0)+Q_k(1)+\cdots\cdots+Q_k(k-1)$$

であることを示せ。

(4)　不等式 $E_k \leqq \dfrac{n}{n-k+1}$ が成り立つことを示せ。

(5)　不等式 $E_1+E_2+\cdots\cdots+E_n \leqq n+n\log n$ が成り立つことを示せ。

【解法の分析】

(1)　省略

(2)　省略

(3)　省略

(4)　数学的帰納法で解く（詳細は省略）

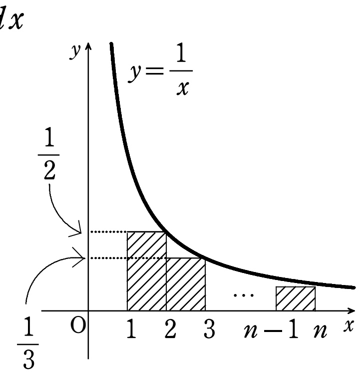
(5)　(4) より，$E_k \leqq \dfrac{n}{n-k+1}$ であるから

$$\begin{aligned} E_1+E_2+E_3+\cdots\cdots+E_n &\leqq 1+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n-2}+\cdots\cdots+\frac{n}{1} \\ &= n+\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}\right) \\ &= n+n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right) \cdots ③ \end{aligned}$$

右の図から

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n \frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx=\Big[\log|x|\Big]_1^n =\log n$$



であるから

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$$

よって，③ から

$$E_1+E_2+\cdots\cdots+E_n \leqq n+n\log n$$

＊ 期待値は，現在の教科書の中では研究・発展的内容に含まれているため、取り扱う際には注意が必要である。

＜２０１６　大阪市立大学　前期　理・医・工学部＞

n を正の整数とし，m を 0 以上 10 以下の整数とする。袋 1 から袋 n まで，外見では区別のつかない袋が n 袋ある。$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について，袋 k の中には，赤球が k 個，白球が $n-k$ 個入っているものとする。袋を 1 つ選んだ後、その選んだ袋について次の操作を 10 回繰り返して行うことにする。

（操作）袋から球を 1 個取り出し，色を確認してその袋に戻す。

赤球をちょうど m 回取り出す確率を $P_{m,n}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$P_{m,n}$ を求めよ。

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty} P_{10,n}$ を求めよ。

(3)　$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$ について，$\lim\limits_{n\to\infty} P_{m,n}=\lim\limits_{n\to\infty} P_{m+1,n}$ を示せ。

【解法の分析】

(1)　袋 k を選んだ後，操作を 10 回繰り返し行ったとき赤球をちょうど m 回取り出す確率は

$$\frac{1}{n}\cdot {}_{10}\mathrm{C}_m\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(1-\frac{k}{n}\right)^{10-m}$$

よって，$P_{m,\ n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot {}_{10}\mathrm{C}_m\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(1-\frac{k}{n}\right)^{10-m}$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty} P_{10,\ n}=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^{10}=\int_0^1 x^{10}dx}_{\boxed{\text{区分求積法の計算を利用している}}}=\frac{1}{11}$

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty} P_{m,\ n}$

$$\begin{aligned}
&={}_{10}\mathrm{C}_m\int_0^1 x^m(1-x)^{10-m}dx \\
&={}_{10}\mathrm{C}_m\int_0^1\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right)'(1-x)^{10-m}dx \qquad \boxed{\text{部分積分法}} \\
&={}_{10}\mathrm{C}_m\left[\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^{10-m}\right]_0^1\right. \\
&\left.-\int_0^1\frac{1}{m+1}x^{m+1}\{(m-10)(1-x)^{9-m}\}dx\right] \\
&=\frac{10!}{m!(10-m)!}\cdot\frac{10-m}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}dx \\
&=\frac{10!}{(m+1)!(9-m)!}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}dx \\
&={}_{10}\mathrm{C}_{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}dx=\lim_{n\to\infty}P_{m+1,\ n}
\end{aligned}$$

4　おわりに

不等式の解法においては，グラフや面積等を利用できるときはそれらを上手く活用し，わかりやすく問題の置き換えができるかどうかが非常に大切である。特に，微分法と積分法の内容は 1 つの大問の中で取り扱われることが多いため，生徒を指導する際に，微分積分の相互関係もしっかり理解させておくことが重要になってくる。さらに，最近では「場合の数・確率」と「数列の極限」,「無限級数」などのような融合問題も増加傾向にあり，問題をあらゆる角度から分析する力も要求されるようになってきている。小手先だけの理解ではなく，本当の意味での数学力を身につけさせるため，基礎基本の徹底はもちろん，定義・定理・公式の意味やつながりをしっかり理解させながら，論証力・総合的洞察力を養っていく指導を心掛けていきたい。

【参考文献】

モノグラフ　微分〔改訂版〕　（科学新興新社）

モノグラフ　積分〔改訂版〕　（科学新興新社）

2016 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕（聖文新社）

2015 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕（聖文新社）

2014 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕（聖文新社）

2013 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕（聖文新社）

2010 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕（聖文新社）