大学入試研究委員会

本研究委員会は，８名の研究委員で構成されています。継続的な研究から発展的な研究まで各分野に分かれて努力を続けてきました。

大学入試センター試験に関してのアンケートにつきましては，県下の受験生や先生方のご協力をいただき，本年度も集計・分析を終え報告する運びとなりました。ありがとうございました。

先生方のご意見，ご指導をいただき，今後の研究活動に生かしていきたいと思いますので，よろしくお願いします。

本年度の研究一覧は以下の通りです。

1　国公立大学入試問題の研究
　　－中四国ブロック大学入試問題の研究－
　　愛媛県立　松 山 北　高等学校　川野　星子

2　国公立大学入試問題の研究
　　－定積分と不等式－
　　愛媛県立　松 山 東　高等学校　松浦　　正

3　平成２８年度愛媛大学入試問題（数学）の研究
　　愛媛県立　松 山 南　高等学校　渡部　靖司

4　中四国の国公立大学入試問題の研究
　　－ＡＯ・推薦入試の問題から－
　　愛媛県立　北　　条　高等学校　砂田　佳範
　　愛媛県立　西　　条　高等学校　関　　聡司

5　平成２８度大学入試センター試験アンケートの分析
　　愛媛県立　大　　洲　高等学校　岩村　　崇
　　愛媛県立　川 之 石　高等学校　清水　隼人
　　愛媛県立　宇和島東　高等学校　渡邉　弘樹

国公立大学入試問題の研究

－中四国ブロック大学入試問題の研究－

愛媛県立松山北高等学校　　教諭　川野　星子

1　はじめに

平成 28 年度入試において，愛媛県の高校出身の岡山大学の合格者は 172 名（女子 61 名），広島大学の合格者は 117 名（女子 47 名）であった。また，平成 27 年度入試では，岡山大学の合格者は 161 名（77 名），広島大学の合格者は 115 名（42 名）であり，平成 26 年度入試では，岡山大学の合格者は 187 名(81 名)，広島大学の合格者は 108 名(38 名)であった。（データ：全学部の合計人数，各大学のホームページより）毎年，多くの生徒が受験をしており，約 300 名合格している。

岡山大学，広島大学ともに標準的な問題からやや難しい問題まで幅広く出題されている。そのため，教科書の基本事項をマスターし，演習問題で確かな計算力を身につけ，さらに論理的に正しい答案作成の力が必要である。今年で新教育課程での入試も 3 年目となり，どのような問題が出題されたのかを研究した。

2　2 次試験の内容（新課程 2015，2016 年度）

(1)　岡山大学　前期

数学ⅠⅡⅢAB（理・工・環境理工・農・医・歯・薬・教育（選択））

年度	番	項目（内容）
2016	1	階乗に含まれる素因数ｐの個数
	2	3 次方程式の実数解の個数, 3 倍角の公式，解の範囲
	3	変曲点の軌跡，曲線で囲まれた部分の面積
	4	空間座標，球面を利用して定義された xy 平面上の 2 点の対応
2015	1	2 枚のカードを引くときの確率
	2	球面と直線の交点の座標
	3	(n＋2)次の多項式で表される関数の接線，面積，極限
	4	立方体の平面による切り口の面積，定積分の計算

数学ⅠⅡAB（経済・教育（選択））

年度	番	項目（内容）
2016	1	1 の虚数 3 乗根ωの計算，二項定理
	2	空間座標，球面を利用して定義された xy 平面上の 2 点の対応
	3	サイコロを 3 回振ったときの目によって定まる三角形についての確率
	4	3 次方程式の実数解の個数, 3 倍角の公式，解の範囲
2015	1	2 枚のカードを同時に引くときの確率
	2	三角形の面積の最小
	3	隣接 3 項間の漸化式で定義された数列の一般項
	4	2 つの放物線の接線の傾き，面積とその最大値

(2)　広島大学　前期

数学ⅠⅡⅢAB（総合科・教育（自然・数理系）・理・医・歯・薬・工・生物生産）

年度	番	項目（内容）
2016	1	四面体の体積
	2	逆関数，導関数の計算，面積
	3	複素数平面上の点列，極限，ド・モアブルの定理
	4	反復試行の確率
	5	合同式の応用，2^nの下２桁・下３桁の周期性
2015	1	面積，回転体の体積
	2	数列の漸化式と極限
	3	平面と直線の交点
	4	2 曲線が接する条件，関数の極限
	5	重複順列を題材にした確率計算

数学ⅠⅡAB（経済・教育（技術・情報系・人間生活系）・歯（口腔保健））

年度	番	項目（内容）
2016	1	円と放物線の共通接線，面積
	2	余弦定理，正弦定理
	3	四面体の体積
	4	反復試行の確率
	5	平均値，分散，中央値
2015	1	3 次関数と 2 次関数の共通接線
	2	対数の数列，漸化式
	3	相似な三角形の面積和
	4	3 つの放物線で囲まれた領域の面積
	5	漸化式を利用した確率計算

(3)　広島大学　後期

総合科

年度	番	項目（内容）
2016	1	四面体の体積
	2	整数，確率
	3	正八角形の対角線で囲まれた多角形の面積
	4	周期関数の定積分，無限等比級数の和
2015	1	関数のグラフ，面積，関数の極限
	2	三角形の重心と外心
	3	$\sum_{k=1}^{n} k^5$が$\sum_{k=1}^{n} k$で割り切れることの証明
	4	反復試行の確率，漸化式

理（数学）

年度	番	項目（内容）
2016	1	4 点が同一平面上にある条件，四面体の体積の最大値
	2	対数計算，対数方程式の解の個数
	3	複素数平面における変換
	4	面積，三角関数の最大値・最小値
	5	確率と漸化式
2015	1	四面体の体積
	2	方程式の解を題材にしたさいころの確率
	3	楕円と直線で囲まれた図形の面積
	4	接する２円の接点の軌跡
	5	素因数分解と約数の個数

３　新教育課程の主な問題

(1)　数学Ⅰ　データの分析

広島大 2016 年度前期　数学ⅠⅡAB　問５

「n を２以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(ｱ) 変量xのデータの値が$x_1, x_2,$・・・$,x_n$であるとし，$f(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2$　とする。f(a)を最小にする a は$x_1, x_2,$・・・$,x_n$の平均値で，そのときの最小値は$x_1, x_2,$・・・$,x_n$の分散であることを示せ。

(ｲ) c を定数として，変量 y，z の k 番目のデータの値が　$y_k = k$（k=1,2,・・・,n）

$z_k = ck$（k=1,2,・・・,n）

であるとする。このとき，$y_1, y_2,$・・・$,y_n$の分散が$z_1, z_2,$・・・$,z_n$の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(ｳ) 変量 x のデータの値が$x_1, x_2,$・・・$,x_n$であるとし，その平均値を$\bar{x}$とする。新たにデータを得たとし，その値をx_{n+1}とする。

$x_1, x_2,$・・・$,x_n, x_{n+1}$の平均値をx_{n+1}，$\bar{x}$および n を用いて表せ。

(ｴ) 次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40，670，35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった。このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数値でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ。」

平均値や分散の定義に従って解けばよい。文字がたくさん出てくるが、丁寧に扱えば問題ないと思われる。(ｱ)では，a に関する 2 次関数と見て, a について平方完成をすることに気付くことができるかがポイントである。(ｴ)では，41 個目のデータの値が 40 であるから，平均値は 40 で変わらない。このときの偏差の 2 乗の値は 0 であるから 40 個のデータの偏差の 2 乗の和を 41 で割ればよい。

$x_1, x_2,$・・・$,x_n$について

平均値$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

分散　$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$ または $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\bar{x})^2$

(2)　数学Ａ　整数の性質

広島大学 2016 年度後期　総合科学部　問２

「次の問いに答えよ。

(ｱ) 980x を 2016 で割った余りが 28 となる整数 x は存在するか。理由をつけて答えよ。

(ｲ) 1000x を 2016 で割った余りが 28 となる整数 x は存在するか。理由をつけて答えよ。

(ｳ) 自然数 n に対し，1+2+・・・+n を n で割った余りを求めよ。

(ｴ) 1 個のさいころを 3 回続けて投げて出た目の数を掛け合わせる。このとき得られた数を 3 で割ったら 1 余る確率を求めよ。」

(ｱ)，(ｲ)では不定方程式をつくり，互除法を利用する。例えば，980x を 2016 で割ったときの商を y とすると，980x=2016y+28 が成り立つ。両辺を 28 で割って，35x=72y+1 つまり

35x－72y=1

72=35×2+2 より 2=72－35×2・・・①

35=2×17+1 より 1=35－2×17・・・②

①を②へ代入する。

1=35－(72－35×2)×17

=35－72×17+35×34

=35×35－72×17　x=35，y=17 のとき

980×35=2016×17+28 が成り立つ。よって 980x を 2016 で割った余りが 28 となる整数 x は存在する。また，(ｳ)，(ｴ)のように余りによる分類の問題は次のようなものもある。

広島大学 2015 年度後期　総合科学部　問３

「自然数 n に対し, $P_n = \sum_{k=1}^{n} k$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n} k^5$とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(ｱ) P_nを 3 で割った余りは 0 または 1 になることを示せ。

(ｲ) $P_{n+1}^2 - P_n^2$および$4(P_{n+1}^3 - P_n^3)$がともに$(n+1)^3$で割り切れることを示せ。

(ｳ) $Q_n = \frac{4P_n^3 - P_n^2}{3}$を示せ。」

(ｱ)において，例えば，$P_n = \frac{1}{2}n(n+1)$より

$2P_n = n(n+1)$である。

n=3k（k は整数）のとき，$2P_n = 3k(3k+1)$

2 と 3 は互いに素より，P_nは 3 の倍数である。

n=3k+2（k は整数）のとき, $2P_n = (3k+2)(3k+2+1) = 3(3k+2)(k+1)$　2 と 3 は互いに素より, P_nは 3 の倍数である。

n=3k+1（k は整数）のとき, $P_n = \frac{1}{2}(3k+1)(3k+1+1) = 9\times\frac{1}{2}k(k+1)+1 = 9P_k$+1　より，$P_n$を 3 で割った余りは 1 である。よって，$P_n$を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

旧課程であるが，互除法で解ける問題が岡山大学で出題されている。

岡山大学 2013 年度前期　数学ⅠⅡAB　問１

「以下の問いに答えよ。

(ｱ) 整数 x，y が 25x－31y=1 を満たすとき，x－5 は 31 の倍数であることを示せ。

(ｲ) 1≦y≦100 とする。このとき，不等式 0≦25x－31y≦1 を満たす整数の組(x,y)をすべて求めよ。」

誘導があるので，両辺から 125 を引くことが分かる。25x－125=31y－124

25(x－5)=31(y－4)

25 と 31 は互いに素より x－5 は 31 の倍数である。

誘導がなければ互除法を用いて，

31=25×1+6　より　6=31－25×1・・・①

25=6×4+1　より　1=25－6×4・・・②

①を②へ代入する。

1=25－(31－25×1)×4=25×5－31×4・・・③

③と与式より 25(x－5)－31(y－4)=0

つまり，25(x－5)=31(y－4)が成り立つ。

25 と 31 は互いに素より x－5 は 31 の倍数である。

その他に，次のような問題も出題された。

岡山大学 2016 年度前期　数学ⅠⅡⅢAB　問１

「p は素数とする。正の整数 n に対し，p^dが n の約数となる整数 d（d≧0）の中で最大のものを f(n)とする。このとき以下の問いに答えよ。

(ｱ) p=3, $n = 3^2!$のとき f(n)の値を求めよ。
(ｲ) p=5, $n = 5^2!$のとき f(n)の値を求めよ。
(ｳ) m が正の整数で$n = p^m!$のとき f(n)を求めよ。」

定義がわかりにくいが，3^dが$3^2!$の約数となる整数 d の中で最大のもの，と考えれば，$3^2!$ つまり 9!に含まれる素因数 3 の個数を調べればよいことに気付く。ちなみに，3 の倍数は 3 個，3^2の倍数は 1 個より，$f(3^2!) = 3 + 1 = 4$ である。
(ｲ)，(ｳ)以下同様。

(3) 数学Ⅲ 複素数平面
広島大学 2016 年度前期 数学ⅠⅡⅢAB 問３
「複素数平面上を，点 P が次のように移動する。
1.時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を$Q_1(z_1)$とすると，$z_1 = 1$である。
2.時刻 1 に P は$Q_1(z_1)$において進行方向を$\frac{\pi}{4}$回転し，時刻 2 までその方向に速さ$\frac{1}{\sqrt{2}}$で移動する。移動後の P の位置を$Q_2(z_2)$とすると，$z_2 = \frac{3+i}{2}$である。
3.以下同様に，時刻 n に P は$Q_n(z_n)$において進行方向を$\frac{\pi}{4}$回転し，時刻 n+1 までその方向に速さ$(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$で移動する。移動後の点 P の位置を$Q_{n+1}(z_{n+1})$とする。ただし，n は自然数である。
$\alpha = \frac{1+i}{2}$として，次の問いに答えよ。
(ｱ) z_3, z_4を求めよ。
(ｲ) z_nをα，n を用いて表せ。
(ｳ) P が$Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，・・・と移動するとき，P はある$Q(w)$に限りなく近づく。w を求めよ。
(ｴ) z_nの実部が(ｳ)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。」

(ｱ) において$z_3 - z_2$，の偏角，絶対値を利用して$z_3 - z_2$を求め，$z_3 = z_2 + (z_3 - z_2)$より，z_3を求める。つまり，$z_3 - z_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}i$

よって，$z_3 = z_2 + \frac{1}{2}i = \frac{3+2i}{2}$

同様に，$z_4 = z_3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{5+5i}{4}$

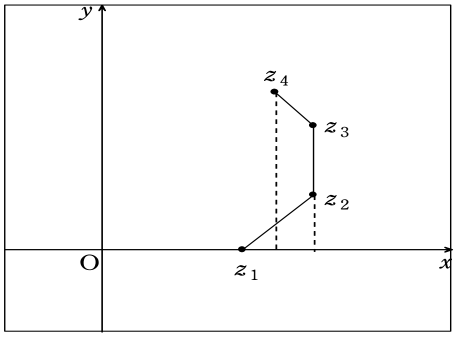
(ｲ) (ｱ)を参考にして，

$\arg(z_{n+1} - z_n) = \frac{n\pi}{4}$，$|z_{n+1} - z_n| = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$より

$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}) = (\frac{1+i}{2})^n = \alpha^n$

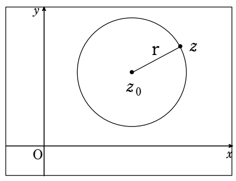
n≧2 のとき，$z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

$z_1 = 1$より，n=1 のときも成り立つ。
図をかいて，z_nがどのように動いているか確認するとよい。



広島大学 2016 年度後期 理学部 問３
「次の問いに答えよ。
(ｱ) a,b を複素数とする。$z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + b = 0$を満たす点 z の全体が複素数平面上の円となるための a, b に関する条件を求めよ。
(ｲ) a,b は複素数で，$|a|$≠1，ab≠0 とし，$z=\frac{ab}{w+a}$とする。複素数平面上の点 w が原 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 z はどのような図形を描くか。
(ｳ) a,b,c は複素数で，$|a|$≠1，ab≠c とし，$z=\frac{bw+c}{w+a}$とする。複素数平面上の点 w が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 z はどのような図形を描くか。」

(ｱ) について，

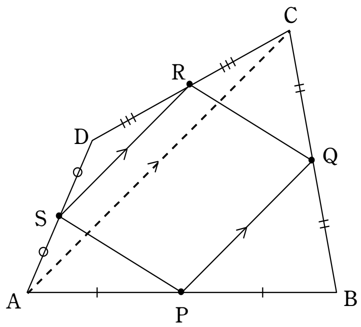


$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = a\bar{a} - b$
$(z - a)\overline{(z - a)} = a\bar{a} - b$
$|z - a|^2 = |a|^2 - b$
b は実数で，かつ$|a|^2 - b > 0$
複素数平面において，中心z_0，半径 r の円は$|z - z_0| = r$ である。その他にも，複素数平面上における図形の方程式もおさえておきたい。

4 まとめ
2015 年度，広島大学後期理学部の問１において，「空間内に 3 点 O，A，B があるとき，△OAB の面積 S は$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$ で与えられることを示せ。」が出題された。公式の丸覚えではなく，公式を導けるようにしておくことも大事である。
また，2012 年度，岡山大学前期数学ⅠⅡAB の問３において，「四角形 ABCD は平行四辺形ではな

いとし，辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。(1)線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。」が出題された。模範解答は, 位置ベクトルを用いて解くと簡単に示すことができる。この問題では，中点が一致するとはどんな図になるのか, ということまで考えると面白い。四角形 PQRS は平行四辺形になる。実は中学の知識で解ける。

参考：△ABC において，P，Q は中点なので，中点連結定理を用いると，AC∥PQ かつ PQ＝$\frac{1}{2}$AC が成り立つ。また，△ACD において，R，S は中点 z なので，中点連結定理を用いて，AC∥SR かつ SR＝$\frac{1}{2}$AC が成り立つ。故に，PQ∥SR かつ PQ=SR が成り立つので (1 組の向かい合う辺が平行でかつ長さが等しい)，四角形 PQRS は平行四辺形である。よって, 平行四辺形の対角線は各々の中点で交わるから，K と L は一致する。



難関な問題を解いたときの達成感は数学の魅力の 1 つではあるが, なぜこの公式が成り立つのか, この性質は何に使えるのか, どんな図になるのかなど, 入試問題を通して数学そのものに関心を持ってもらいたい。