中四国の国公立大学入試問題の研究
－ AO・推薦入試の問題から －

愛媛県立新居浜西高等学校　松本　　慎
愛媛県立 北　条 高等学校　砂田　佳範

１　はじめに

四国地区には，５つの国立大学，４つの公立大学が設置されている。中国地方には，５つの国立大学，11 の公立大学が設置されている。国立大学では，約 23 %，公立大学では，約 32 %の生徒をAO・推薦入試により学生募集を行っている。私たちが生徒に指導する際，過去問を解かし，その傾向を見つけることで対策を講じることができると思う。そのため，昨年度に引き続いて，中四国の国公立大学のAO・推薦入試問題で出題された数学の問題を取り上げた。

２　平成 29 年度四国の国公立大学 AO・推薦入試問題

愛媛大学　理学部　AO 入試Ⅱ

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ に入る数または式を解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　$\cos x+\sin x=\dfrac{6}{5}$ のとき，$\sin 2x=\boxed{ア}$ である。

(2)　関数 $y=xe^{-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ は，$x=\boxed{イ}$ において最大値 $\boxed{ウ}$ をとる。

(3)　α を複素数とする。複素数平面において，点 z が原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動くとき，$w=\alpha(z+2)$ で表される点w が点 $1+\sqrt{3}i$ を中心とする円を描いたとする。このとき，$\alpha=\boxed{エ}$ で，点 w が描く円の半径は $\boxed{オ}$ である。

(4)　和の絶対値が 100 である２つの整数 m，n $(m\geqq n)$ がある。m を４倍すると n より小さくなるとする。このような n は全部で $\boxed{カ}$ 個である。

(5)　座標平面上の x 軸上にある点 P を，次の規則にしたがって動かすとする。

　　さいころを１個投げ，出た数を４で割った余りが k であるとき，点 P を x 軸の正の方向に k だけ移動する。

最初に P が原点 (0，0) にあるとした場合，さいころを３回投げたあと P が点 (7，0) にある確率は $\boxed{キ}$ である。

(6)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}|x|e^{-x}dx=\boxed{ク}$ である。

$\boxed{2}$　次の命題の真偽を判定し，解答用紙に書かれた真または偽のいずれか一方の文字に○を付けよ。さらに，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ（ただし，(2) の命題が偽の場合には，微分可能でないことを証明せよ。）

(1)　0 でない２つの複素数 α と β に対して．$\alpha+\beta$ と $\dfrac{\alpha}{\beta}$ がいずれも実数のとき，α と β はともに実数である。

(2)　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2-4 & (x\geqq 0)\\ 2x & (x<0)\end{cases}$$

と定める。このとき，$f(x)$ は $x=0$ において微分可能である。

(3)　自然数 a が奇数であるとき，a と $a+4$ は互いに素である。

(4)　実数 a，b に対して

$$||a|-|b||\leqq|a-b|$$

が成り立つ。

$\boxed{3}$　△ABC の辺 BC の中点を M とする。このとき，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ を示せ。

$\boxed{4}$

(1)　関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能で $f'(a)\neq 0$ とするとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を求めよ。

(2)　$f(x)=x^2-3$ とする。数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$ を次の (a)，(b) により定める。

　(a)　$a_1=3$ とする。

　(b)　a_n が定められたとする。このとき，曲線 $f(x)$ 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1}とする。

（i）　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

（ii）　すべての $n=1$，2，3，$\cdots$ について

$$a_{n+1}-\sqrt{3}>0$$

が成り立つことを示せ。

（iii）　すべての $n=1$，2，3，$\cdots$ について

$$a_{n+1}-\sqrt{3}<\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$$

が成り立つことを示せ。

（iv）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ を示せ。

高知大学　教育学部　推薦入試Ｉ

$\boxed{5}$　a を定数とする。2 次関数 $y=x^2-ax+1$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を求めよ。

$\boxed{6}$　四角形 ABCD において，AB=3，BC=4，AD$=\sqrt{3}$，∠ABC=60°，∠CDA=60° とする。次の問いに答えよ。

(1)　対角線 AC および辺 CD の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

$\boxed{7}$　男子６人，女子５人の中から４人の委員を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1)　男子から４人

(2)　男子から２人，女子から２人

(3)　少なくとも男子１人，女子１人を含む

高知大学　理工学部　数学物理学科（数学分野）推薦入試Ⅰ

$\boxed{1}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

よく知っているように，すべての実数 x に対して $\sin(x+2\pi)=\sin x$ が成り立つ。さらに，すべての 0 でない整数 n に対して，$\sin(x+2n\pi)=\sin x$ となる。この $2n\pi$ を時として関数 $\sin x$ の周期と呼ぶ。特に，その正の最小のもの 2π を関数 $\sin x$ の基本周期と呼ぶことがある。

この考え方を次のように一般化しよう。a を 0 でない実数とする。関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して $f(x+a)=f(x)$ を満たすとき，$f(x)$ を周期関数と呼び，a を $f(x)$ の周期と呼ぶことにする。a が $f(x)$ の周期のとき，$2a$ も $f(x)$ の周期になる。より一般に，すべての 0 でない整数 n に対し na は $f(x)$ の周期となる。周期関数 $f(x)$ の周期の中で正の最小のものを $f(x)$ の基本周期と呼ぶことにする。

a を正の実数とする。$f(x)$ が周期 a の周期関数のとき，$0\leqq x<a$ の範囲で $f(x)$ の値が与えられていれば，すべての x に対して $f(x)$ の値がわかる。例えば，$f_1(x)$ が周期 2 の周期関数で，$0\leqq x<1$ のとき $f_1(x)=6x$ であり，$1\leqq x<2$ のとき $f_1(x)=12-6x$ であるとする。このとき，$0\leqq x<2$ の範囲におけるグラフをもとにして，$f_1(x)$ が周期 2 の周期関数であることから，$y=f_1(x)$ のグラフを描くことができる。

次に，周期関数が与えられたとき，それを用いて新しい周期関数を作ることを考えてみよう。上の $f_1(x)$ に対して，$f_2(x)=f_1\left(\dfrac{2}{3}x\right)$ とおくと，$f_2(x)$ は周期 3 の周期関数になる。さらに，$f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)$ とおくと，$f_3(x)$ は周期 6 の周期関数になる。

さらに例を考えてみよう。$f_4(x)$ は周期 4 の周期関数で，$0\leqq x<2$ のとき $f_4(x)=f_1(x)$ であり，$2\leqq x<4$ のとき $f_4(x)=-f_1(x)$ であるとする。このとき，$f_5(x)=(f_4(x))^2$ とおくと，$f_5(x)$ の基本周期はどのようになるだろうか？

問 1．$y=f_1(x)$ のグラフを図示せよ。

問 2．$f_1(x)$ の基本周期が 2 であることを証明せよ。

問 3．$y=f_2(x)$ のグラフを図示せよ。

問 4．$y=f_3(x)$ のグラフを図示せよ。

問 5．$f_5(x)$ の基本周期はどうなるかを理由を付けて答えよ。

$\boxed{2}$　次の文章を読んで，以下の問いに答えよ。

n を 2 以上の自然数とする。n 個の椅子を丸テーブルの周りに並べる。適当な椅子を 1 番とし，反時計回りにそこから順番に n 番まで番号を振る。そして，n 人の人がひとつずつ椅子に座る。このとき，次のような行為を考えてみよう。

（ｉ） 1 番の席の人から反時計回りに数え始めてふたり目の人に席を離れてもらう。

（ii） 次に，席を離れた人の反時計回りの隣の人から反時計回りに数え始めてふたり目の人に席を離れてもらう。

（iii） （ii）を繰り返す。

席を離れる行為を $n-1$ 回繰り返せば，ただひとりが残る。この人は何番目の席に座っていたのだろうか？

まず，n 個の椅子に対して，上の行為で最後に残った人の席の番号を $L(n)$ で表すことにする。実際に図を描いて調べてみれば，次の表 1 ができる。

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$L(n)$	1			3	5			3		7	9	11	13	15

表 1

この表から $L(2^m)$ と $L(2^m-1)$ の式を予想できるだろう。

今度は n 個の椅子に対して，席を離れる行為をちょうど k 回繰り返したときに，最後に席を離れる人の番号を $M(n,\ k)$ で表すことにする。席を離れる行為を何回か繰り返せば，再び 1 番の席の人に戻ってくることを考えると，次の式が成り立つことがわかる。

$$M(2t,\ t)=2t \tag{1}$$
$$M(2t+1,\ t+1)=1 \tag{2}$$

これらの式の意味を考えると，予想した $L(2^m)$ と $L(2^m-1)$ の式が正しいことが証明できる。

さらに，上でわかったことを具体的な計算に応用してみよう。

$$254=2\times127=2\times(2^7-1)$$

であるから，(1) と $L(2^m-1)$ の式を用いると $L(254)=253$ がわかる。同様に工夫して $L(515)$ を求めてみよう。

問 1．表 1 における $n=3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10$ に対する $L(n)$ の値を求めよ。なお，求め方を書く必要はなく，答えのみでよい。

問 2．(1) と (2) が成り立つ理由を説明せよ。

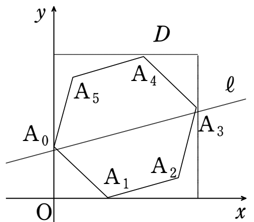
問 3．$L(2^m)$ と $L(2^m-1)$ の式を予想し，さらに，それが正しいことを証明せよ。

問 4．$L(254)=253$ が成り立つ理由を説明せよ。

問 5．$L(515)$ を求めよ。求め方も明記すること。

高知大学　医学部医学科　AO 入試Ⅰ　総合問題Ⅰ

Ⅰ　xy 平面において，下の図のように，不等式 $0\leqq x\leqq1$ と $0\leqq y\leqq1$ を満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を D とする。点 A_0 は y 軸上にあり，A_1 は x 軸上にあり，A_3 は図のように領域 D の右境界線上にあるとする。さらに A_2，A_4，A_5 は D 内にあり，A_0，A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_0 を反時計回りにこの順で線分で結んでいくとき，D 内に正六角形ができるとする。点 A_0 と A_3 を通る直線 ℓ の方程式を $y=(\tan\theta)x+b$ とおく。ここで $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。次の設問に答えなさい。ただし，必要ならば $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ を用いなさい。



設問 1　A_4 の座標と b を θ を用いて表しなさい。

設問 2　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{12}$ であることを示しなさい。

設問 3　正六角形 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積を θ を用いて表しなさい。

設問 4　正六角形 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ の面積の最大値を求めなさい。

Ⅱ　3 つの変量 A，B，C を 5 回測定した結果が下の表のようになっている。次の設問に答えなさい。

	1	2	3	4	5
A	1.00	1.50	3.75	1.75	2.00
B	0.00	-0.30	0.20	-0.20	0.30
C	1.00	2.50	-1.00	-1.00	-1.50

設問 1　A の平均と中央値（メジアン）を求めなさい。

設問 2　A，B，C のそれぞれの分散 a，b，c を小さい方から順番に左から並べなさい。

設問 3　A と B の相関係数，B と C の相関係数，C と A の相関係数，それぞれの符号を求めなさい。

Ⅲ，Ⅳ のうちいずれか 1 問を選択し，解答してください。

Ⅲ　数列 $\{a_n\}$ は初項と公差が正の等差数列とする。さらに $\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{a_7}{a_3}$ を満たすとする。このとき，次の設問に答えなさい。

設問 1　$\dfrac{a_7}{a_3}=\dfrac{a_k}{a_7}$ を満たす k を求めなさい。

設問 2　$b_1=a_1$，$b_2=a_3$，$b_3=a_7$ とする。数列 $\{b_m\}$ が等比数列となるように b_m を数列 $\{a_n\}$ から取ってくる。$b_m=a_p$，$b_{m+1}=a_q$ としたときに q を p で表しなさい。

設問 3　$b_m=a_t$ としたときに t を m で表しなさい。

Ⅳ　次の設問に答えなさい。

設問 1　円周上の異なる 3 点を A，B，C とする。これらは内積の関係

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

を満たすとする。このとき，三角形 ABC はどのような三角形になるか。証明をつけて答えなさい。

設問 2　3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のうち，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく，互いに直交する。このとき $s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}$ の大きさが最小となる s と t と，その最小値を求めなさい。

設問 3　空間の 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ $(1,\ 2,\ -2)$，$(2,\ -1,\ 3)$，$(2,\ -4,\ 5)$ とする。三角形 ABC の面積を求めなさい。

高知工科大学　経済・マネジメント学群　AO 入試

Ⅰ　次の各問に答えよ。なお，解答用紙の所定欄に答のみを記入すること。

(1)　x の多項式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ および $x-1$ で割ったときの余りは，それぞれ $3x+1$，-4 である。このとき，$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2$ 上の点で，点 $(6,\ 3)$ との距離が最も小さくなるようなものの x 座標を求めよ。

(3)　x の方程式 $x^2-3x-2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ の実数解をすべて求めよ。

(4)　t が実数全体を動くとき，2 直線 $tx-y-2t=0$ と $x+2ty-2t=0$ の交点 $(x,\ y)$ について，$x+y$ が取り得る値の範囲を求めよ

(5)　$x>0$，$y>0$，$x+2y=10$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。

(6)　1 辺の長さが 2 の正方形の周および内部を A とし，正方形の対角線の交点を中心として A を 45° 回転させたものを B とする。A と B の共通部分の面積を求めよ。

(7)　3 辺の長さが 5，6，7 である三角形の内接円の半径を求めよ。

(8)　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ について，$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{6}$，$\sin\alpha\cos\beta=-\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(9)　次の連立不等式の表す領域の面積を求めよ。

$$x^2\leqq y,\ y\leqq 2x+3,\ y\leqq -x+6$$

(10)　2 つの円 $x^2+y^2\leqq 4$，$(x-\sqrt{6})^2+(y-\sqrt{6})^2\leqq 4$ の共通部分の面積を求めよ。

(11)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$ を求めよ。

(12)　$y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ を x について微分せよ。

Ⅱ　0，1，2，3，4，5，6，7 の 8 つの数について，次の各問に答えよ。

(1)　上の 8 つの数から異なる 4 つの数をとって 4 けたの数をつくるとき，何通りの数ができるか。

(2)　(1) のうち，4 の倍数は何通りできるか。

(3)　上の 8 つの数から異なる 2 つの数をとる組合せをすべて考え，それぞれの組合せについて 2 つの数の積をとる。このようにしてできる積の総和を求めよ。

Ⅲ　n を自然数とする。次の主張と証明を読み，後の設問に答えよ。

【主張１】数 1，2，…，$2n$ からどのように $n+1$ 個の数 a_1，a_2，…，a_{n+1} を選んでも，その中には互いに素な 2 つの数が存在する。

【主張２】数 1，2，…，$2n$ からどのように $n+1$ 個の数 a_1，a_2，…，a_{n+1} を選んでも，その中には一方がもう一方を割り切る 2 つの数が存在する。

【証明】まず主張1を証明する。a_1，a_2，…，a_{n+1} は $_{(ア)}$<u>$a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$ をみたしているとしてよい。</u>このとき，これら $n+1$ 個の数の中には1だけ離れた2つの数が存在する。なぜなら，どの2つも2以上離れているとすると

$a_1 \geqq 1$，$a_2 \geqq a_1+2 \geqq 2$，$a_3 \geqq a_2+2 \geqq 5$，…

…，$a_{n+1} \geqq 2n+1$

となり，$_{(イ)}$<u>矛盾が生じる</u>からである。

a_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$ の中から1だけ離れている2つの数を選び，それらを a と $a+1$ とする。このとき，$_{(ウ)}$<u>これらは互いに素</u>である。よって，主張1が証明された。

次に主張2を証明する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ に対して，a_k を割り切る最大の2のベキを 2^{e_k} とする。つまり，2^{e_k} は a_k を割り切るが，2^{e_k+1} は a_k を割り切らない。すると各 k に対して $a_k=2^{e_k}b_k$ (b_k は自然数) とかける。さらに $_{(エ)}$<u>b_k は奇数</u>である。

1以上 $2n-1$ 以下の奇数は n 個しかないので，$_{(オ)}$<u>b_1，b_2，…，b_{n+1} の中には等しいものがある。</u>それらを b_k と b_l $(1 \leqq k < l \leqq n+1)$ とし，$b_k=b_l=m$ とおく。このとき，$a_k=2^{e_k}m$，$a_l=2^{e_l}m$ であり，$e_k \neq e_l$ である。したがって $_{(カ)}$<u>a_k，a_l のどちらか一方はもう一方を割り切る。</u>よって，主張2も証明された。

[設問]

(1)　下線部 (ア) の理由を説明せよ。

(2)　下線部 (イ) の理由を説明せよ。

(3)　下線部 (ウ) の理由を説明せよ。ただし，一般に自然数 m，n が互いに素であるとは，自然数 d，m'，n' を用いて $m=dm'$，$n=dn'$ とかいたときに必ず $d=1$ となることをいう。

(4)　下線部 (エ) の理由を説明せよ。

(5)　下線部 (オ) の理由を説明せよ。

(6)　下線部 (カ) の理由を説明せよ。

(7)　$n \geqq 2$ のとき，主張1において $n+1$ 個を選ぶかわりに n 個の数を選ぶこととすると，結論は成り立たなくなる。$n=3$ の場合と一般の n の場合について，反例となる n 個の選び方をそれぞれ示しなさい。

(8)　$n \geqq 2$ のとき，主張2において $n+1$ 個を選ぶかわりに n 個の数を選ぶこととすると，結論は成り立たなくなる。$n=3$ の場合と一般の n の場合について，反例となる n 個の選び方をそれぞれ示しなさい。

3　まとめ

平成29年度のAO入試と推薦入試の問題の中で，数学の内容に関するものを取り上げた。平成28年度の問題と比較してみると，それぞれの大学で，単元や出題形式に大きな違いはないようである。教科書の基本的な内容を問う問題や，定理の証明が出ていたり，問題文で数学的な内容を説明して問題を解かせるような読解力を問う問題を出すなど，大学により傾向が異なるので，生徒の進路に合わせた対策が必要であると感じた。また，小論文の問題でも，グラフや表から読み取らせて分析させる問題を出題している大学もいくつかあり，様々な場面で数学的な見方や考え方が必要とされているのを感じた。

4　平成28年度中国地方の国公立大学AO入試問題

島根大学　総合理工学部　理工特別コース

小論文(数学)

サイコロをくり返し投げ、出た目の合計が3の倍数となったところで終了とする。ただし、1 回目に3の倍数が出たら終了とする。例えば、1 回目に5の目が出た場合、2回目に1か4の目が出たら終了となる。n 回目に終了する確率を p_n で表すとき、次の問いに答えよ。(1)　p_1, p_2 および p_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 1$ のとき、p_nを求めよ。

(3)　$lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} kp_k$ を求めよ。ただし、$|r|<1$ のとき

$lim_{n\to\infty} n\,r^n$=0 であることは用いてよい。

島根大学　総合理工学部　機械・電気電子工学科

推薦入試Ⅰ　小論文

課題1

点P(5,10)から円$x^2+y^2=25$に接線を引く場合を考える。これについて以下の設問に答えよ。

(1)　2つの接線 A, B の座標を求めよ。ただし、x座標が小さい方を点 A とする。

(2)　2つの接線 PA と PB の方程式を求めよ。

(3)　2点 A, B 間の距離を求めよ。

(4)　点 P と直線 AB との距離を求めよ。

(5)　三角形 PAB の面積 S を求めよ。また、S と円の面積の 1/2 を比べ、大小を理由と共に答えよ。

島根大学　総合理工学部　数理・情報システム科

情報系コース　推薦入試Ⅰ　小論文

問2

自然数から自然数への関数f を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (x=1\ のとき) \\ 3\times f(x-1)+2 & (x>1\ のとき) \end{cases}$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(a)　関数fの定義から、$f(2)$の値を求めよ。ただし、計算過程も詳しく述べよ。

(b)　(a)の値と関数f の定義から、$f(3)$ の値を求めよ。ただし、計算過程も詳しく述べよ。

(c)　関数fは自然数x に対して等式$f(x)=3^x-1$を満たす。この等式を自然数x に関する数学的帰納法により示した

い。次のアからオを適切な数や数式で埋めて証明を完成させよ。

(基礎段階): $x=1$のとき;

関数fの定義より、$f(1)=\boxed{ア}$。 $3^1-1=\boxed{ア}$。

よって、等式$\boxed{イ}$が成立する。

(帰納段階): $x=k+1$ のとき;

いま、$x=k$のとき、等式$\boxed{ウ}$ $(*)$が成立すると仮定する。このとき、

$f(x)=3\times f(k)+2$

$=3\times\left(\boxed{エ}\right)+2$ ($(*)$より)

$=3^{k+1}-3+2$

$=\boxed{オ}$

したがって、関数fは自然数xに対して等式$f(x)=3^x-1$を満たす。

問4

値が 0 または 1 である信号を A 地点から送信して B 地点で受信することを考える。A 地点から 1 つの信号を送信してその値が変化せずに、B 地点で正しく受信される確率を$p(0\leqq p\leqq 1)$とする。信号の値 0 が変化した場合は 1 が、信号の値 1 が変化した場合は 0 が、それぞれ受信されるものとする。このように信号の値が変化したとき、送信された信号が誤って受信されたということにする。値の変化は 1 つの信号につき、1 回までである。信号の値は変化することはあっても消滅することはない。

以下では、5つの信号を1つずつ A 地点から送信することを考える。送信された 1 つの信号が正しく受信されたとき○、誤って受信されたとき×と書くとすると、5つの信号のうち、2つ目の信号のみが誤って受信された場合は○,×,○,○,○と書くことができる。×の位置を考えると、5つの信号のうち、ちょうど 1 つの信号が誤って受信される場合は、全部で 5 通りあることがわかる。

(a) 送信された5つの信号のうち、ちょうど2つの信号が誤って受信される場合は何通りあるかを示せ。導出過程も示せ。

(b) 送信された5つの信号のうち、1つ以上が誤って受信される確率をpを使って表せ。

以下では、A 地点から送信する5つの信号を、0, 0, 0, 0, 0 と 1, 1, 1, 1, 1 の2種類に限ることにする。

・0 の個数の方が多ければ、0, 0, 0, 0, 0 が送信されたと解釈する。

・1 の個数が多ければ、1, 1, 1, 1, 1 が送信されたと解釈する。

たとえば、0, 1, 0, 0, 1 を受信した場合は、0 の個数が 3、1 の個数が 2 であることから、0, 0, 0, 0, 0 が送信されたと解釈する。

(c) 受信した5つの信号を上記の方式で解釈する。信号の値が変化した場合でも、解釈した結果が実際に送信された信号と等しくなるのは、変化した信号の値がいくつまでのときか。

(d) 受信した5つの信号を上記の方式で解釈する。解釈した結果が実際に送信された信号と等しくなる確率をpを使って表せ。導出過程も示せ。

島根大学 総合理工学部 数理・情報システム科

推薦入試Ⅰ 小論文

問題1

平面上に異なる3点A,B,Cがある。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分 BC を$m:n$に内分する点を P とするとき、$\overrightarrow{AP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$となることを証明せよ。

(2) △ABC の内部に点 Q があり、$3\overrightarrow{QA}+4\overrightarrow{QB}+5\overrightarrow{QC}=\vec{0}$を満たしているとする。このとき、△QAB, △QBC, △QCA の面積比を求めよ。

問題2

下図のようにx軸上に点 A、y軸上に点 B があり、線分 AB の長さは 1 とする。ここで、点 A のx座標は正、点 B のy座標は正とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 A の座標を$(t,0)$とするとき、点 B の座標を求めよ。

(2) 点$(x,0)$ $(0<x<1)$を通ってy軸に平行な直線と線分 AB が交わるとき、その交点 P のy座標$f(t)$をtとxを用いて表せ。さらに、$f(t)$をtの関数と見たとき、$f(t)$の定義域を求めよ。

(3) $f(t)$の最大値$F(x)$をxの関数とおくとき、$F(x)$を求めよ。

(4) (3)の$F(x)$をxの関数とみるとき、曲線$y=F(x)$の概形を描け。

(5) 曲線$y=F(x)$とx軸及びyで囲まれた図形をx軸のまわりに回転させて得られる立体の体積を求めよ。

問題3

a,b,cを実数とし、$f(x)=ax^3+bx+c$とおく。次の問いに答えよ。

(1) $a=1,b=0,c=1$のとき、$f(x+1)=f(x)+f(1)$を満たす実数xをすべて求めよ。

(2) $f(x+1)=f(x)+f(1)$を満たす実数xが存在するようなa,b,cの満たす条件を求めよ。

(3) すべての実数xに対して$f(x+1)=f(x)+f(1)$かつ$f(1)=2$が成立するとき、a,b,cの値を求めよ。

岡山大学 環境理工学部 環境数理学科

推薦入試Ⅱ 小論文

第1問

2 つの曲線$C_1: y=\frac{\log x}{x}$, $C_2: y=a\log x$ について以下の問いに答えなさい。ただし、$0<a<1$を満たす定数である。

問1 関数$y=\frac{\log x}{x}$の増減を調べなさい。

問2 曲線C_1のグラフをかきなさい。

ただし、$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$が成り立つことを用いてよい。

問3　C_1とC_2の交点の座標を求めなさい。

問4　C_1とC_2で囲まれる領域の面積を求めなさい。

第2問

閉区間$[a,b]$で連続な関数$f(x)$に対して、

$F(t)=\int_a^t f(x)dx$とすると$F(t)$は閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能である。このとき以下の問いに答えなさい。

問1　$F(t)$に平均値の定理を適用することにより条件

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)\ \ (a<c<b)\ \ (1)$$

を満たす実数cが存在することを証明しなさい。

問2　自然数nに対し、$f(x)=x^n$, $a=0,b=1$とする。
このとき条件(1)を満たすcを求めなさい。

問3　問2で求めたcをc_nとする。このとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{n}=0$が成り立つことを用いて、$\lim_{n\to\infty}c_n$を求めなさい。

問4　自然数nに対して、$f(x)=x^{\frac{1}{n}}$, $a=0,b=1$とする。このとき条件(1)を満たすcを求めなさい。

問5　問4で求めたcをd_nとする。このとき、$\lim_{n\to\infty}d_n$を求めなさい。

広島大学　理学部　数学科

AO 入試　筆記試験

[1]

$t>0$とし、Oを原点とする座標空間上に 3 点

$$\mathrm{A}\left(t,-\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{4},0\right),\mathrm{B}\left(t,\sqrt{2}\cos\frac{\pi t}{4},0\right),\mathrm{C}(t,0,\frac{1}{t})$$

がある。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$が垂直となるような$t$を求めよ。

(2)　三角形 OAB が AB を底辺とする二等辺三角形になるようなtをすべて求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積の最大値とそのときのtをすべて求めよ。

[2]

Oを原点とする複素数平面上で、実数2と4を結ぶ実軸上の線分を L とする。また、O を中心とする半径 1 の円周上で、実部、虚部ともに正である点からなる部分を C とする。L 上に点P(α)、C 上に点Q(β)があるとし、点 P を、点 Q のまわりに$\frac{\pi}{2}$だけ回転した点をR(γ)とする。以下の問いに答えよ。

(1)　γをα, βを用いて表せ。

(2)　$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$とする。点 P が L 上のすべての点を動くとき、点 R が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3)　$\alpha=2$とする。点 Q が C のすべての点を動くとき、点 R が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

[3]

x座標、y座標がともに整数である座標平面上の点を、ここでは格子点という。座標平面上の格子点(m,n)を通り、直線$qx-py=0$に垂直な直線をlとする。ただし、p,qはどちらも 0 でない整数で、互いに素であるとする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線lの方程式を求めよ。

(2)　座標平面上の格子点(a,b)とlの距離を求めよ。

(3)　l上にない格子点のうち、lとの距離が最小となる点の 1 つを(c,d)とする。点(c,d)とlの距離を求めよ。

[4]

x,yは非負の整数で$x^3-7x+6=6y^2+24y$を満たすものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=0$のとき、xの値を求めよ。

(2)　$y\neq 2$であることを示せ。

(3)　yが奇数ならば、xは4の倍数であることを示せ。

(4)　yが素数であるとき,xの値を求めよ。

[5]

nを自然数とする。最初に動点 A、B がそれぞれ、座標平面上の点$(0,0),(n,n)$に置かれている。大小の硬貨 1 枚ずつを同時に投げ、次のように動点 A、B が動くものとする。

大きい方の硬貨が表ならば動点Aはx軸の正の方向に1動く。

大きい方の硬貨が裏ならば動点Aはy軸の正の方向に1動く。

小さい方の硬貨が表ならば動点Bはx軸の負の方向に1動く。

小さい方の硬貨が裏ならば動点Bはy軸の負の方向に1動く。

この試行をn回繰り返した後、動点 A,B が同じ点に到達する確率をP_nとする。以下の問いに答えよ。

(1)　P_3,P_4を求めよ。

(2)　多項式$(1+x)^{2n}$と$(1+x)^n(x+1)^n$のx^nの係数を比較することにより、${}_{2n}C_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k^2$となることを示せ。

(3)　P_nを求めよ。

(4)　数列a_n(n = 1,2, …)は以下の関係式を満たすとする。

$$a_1=\frac{1}{2},a_n=(1-\frac{1}{2n})a_{n-1}(n\geqq 2)$$

$n\geqq 2$のとき、$a_n<n^{-\frac{1}{3}}$となることを示せ。

(5)$\lim_{n\to\infty}P_n$を求めよ。

広島大学　工学部

第二類(電気・電子・システム・情報系)

AO 入試　小論文(抜粋)

問題2

本問は、下記の設問に対する解答を通して数学に関する基礎学力、論理的思考力と独創性をみる小論文の問題である。このことに留意し、以下の問いに答えよ。

(1)　等比数列について、下の枠内の語句すべてと数式を用いて 3 行以内で説明せよ。

$\boxed{\text{初項}a\text{、公比r、第}n\text{項}a_n}$

(2)　等比数列の極限に関する数学の問題を創作せよ。問題は複数の小問から構成されていても構わない。

(3)　(2)で作成した問題に対する模範解答を示せ。

広島大学　教育学部

第二類（科学文化教育系）数理系コース

AO 入試　総合評価方式　筆記試験

【Ⅰ】以下の問いに答えよ。

(1) 平面において、三角形の3つの内角の和は 180° であることを証明せよ。

(2) 次の数の大小を比較せよ。iは虚数単位、eは自然対数の底とし、必要ならば$2.7 < e < 2.8$を用いてよい。

$$\left|\frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}i}\right|, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8, 1+\log_8 e, 1+\log_8 2$$

(3) Aを整数全体の集合とし、$B = \{5m+7n \mid m, n \in A\}$とする。$A = B$であることを証明せよ。

(4) 次のように定義される数列の一般項a_nを求めよ。

$$a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n$$

(5) 次の曲線の( )内に示された部分の長さを求めよ。

x=2017+$\cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leqq t \leqq 1$)

【Ⅱ】円に内接する五角形ABCDEにおいて、

AB = BC = CD = 1, DE = 2, EA = 3

とする。また、対角線AC, ADの長さをそれぞれα, βとする。次の問いに答えよ。

(1) $\angle ABC = \theta$として、αをθを用いて表せ。

(2) △ACDに着目して、βをαを用いて表せ。

(3) 四角形ACDEに着目して、αが 4 次方程式

$x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 18x - 12 = 0$

の解であることを示せ。

(4) (3)の 4 次方程式の左辺を$f(x)$とおく。関数$f(x)$の極値を調べ、そのグラフをかけ。

(5) 次の二つの不等式を示せ。

$\sqrt{3} < \alpha < 2, \sqrt{6} < \beta < \sqrt{7}$

【Ⅲ】A, B, C, D、の 4 人でじゃんけんを行う。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ$\frac{1}{3}$の確率で出すものとし、毎回のじゃんけんの結果はそれぞれ独立に決まるものとする。次の問いに答えよ。

(1) じゃんけんを 1 回行うとき、1 人だけが勝つ確率を求めよ。

(2) じゃんけんを 1 回行うとき、あいこになる確率を求めよ。

(3) 勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返し行うとき、2 回目で勝者が決まる確率を求めよ。ただし、負けた人はその後のじゃんけんには加わらないものとする。

(4) 勝敗に関係なく 4 人でじゃんけんを 15 回行うものとする。よって負けた人もじゃんけんから抜けることはない。ここでAはチョキを出さずに、グーを 5 回、パーを 10 回出す。Aがn回目のじゃんけんで 4 回目のグーを出す確率をp_nとするとき、p_nが最大となるnの値を求めよ。

広島大学　理学部　物理学科

AO 入試　筆記試験

[1]以下の質問に答えよ。

問 1 $x-1$を因数にもつ整式$P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$に関して、次の問いに答えよ。ただし、$a, b, c$は実数とする。

(1) cをa, bを用いて表せ。

(2) $P(x) = 0$を満たす解をすべて求めよ。

問 2 次の積分を求めよ。

(1) $\int_0^x (x - \sin x)\, dx$

(2) $\int_0^1 xe^{-ax}\, dx$ $(a > 0)$

問 3 $x < 1$で定義された関数$f(x) = -\log(1-x) - x$について、次の問いに答えよ。

(1) 関数$f(x)$の導関数を求めよ。

(2) 関数$f(x)$の最小値とそのときのxを求めよ。

問 4 整式nを正の整数mで割り、商と余りに分ける。商がkとなるようなnの総和をmの 2 次式として、

$\boxed{ア}m^2 + \boxed{イ}m$と表すとき、$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$に入る式もしくは数を求めよ。

問5 O を原点とする座標平面上の3つのベクトル$\overrightarrow{OA} = (1, 0), \overrightarrow{OB} = (0, 1), \overrightarrow{OC} = (-1, \sqrt{3})$について、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OC}$のなす角を求めよ。

(2) 線分ACの長さを求めよ。

(3) 点Oから線分ACに下ろした垂線と線分ACとの交点をDとする。ベクトル$\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$を用いて、$\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$のように表したとき、s, tを求めよ。

5 まとめ

中国地方の国公立大学におけるAO 入試と推薦入試の問題の中で、数学の内容に関わるものの一部を取り上げた。内容としては、「数学Ⅱ」、「数学 B」や「数学Ⅲ」を中心に幅広く出題されていた。今年度も昨年度と同様に、定義に従って計算させる問題や公式の成り立ちを問う問題が出題されていた。教科書に出てくる公式の証明を疎かにすることなく、一つ一つ着実に身に付けておくことが必要である。また、情報系の学科では、読解力が必要な問題も出題されており、生徒の志望する大学の問題傾向を捉え対策を練っていかなければならない。そのためにも、不断の努力を怠らず、数学教員としてのレベルアップをしていきたい。