平成29年度愛媛大学入試問題（数学）の研究

愛媛県立松山南高等学校　近藤　弘法

1　はじめに

５月20日（土）に松山南高等学校において，愛媛大学理学部　土屋　卓也　教授より平成29年度愛媛大学数学入試問題の解説があった。では，どこでどのような間違いが生じてくるのか，本校生徒の誤答分析を中心に考察していきたい。

2　出題の傾向

（１）出題傾向

今年度は教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースにおいて記述４題を100分で，理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く），医学部医学科においては記述５題を120分で，後期は記述５題を120分で解答する。

（２）出題内容

教育学部（学校教育教員養成課程中等教育コース自然科学系を除く），農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコース

１　小問集合
２　２次関数，微分法･積分法
４　空間ベクトル
５　確率，数列

教育学部学校教育教員養成課程中等教育コース自然科学系

１　小問集合
２　２次関数，微分法･積分法
３　微分法･積分法
４　確率，数列

理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）

４　空間ベクトル
５　確率，数列
６　小問集合
７　複素数平面
８　微分法･積分法

医学部医学科

５　確率，数列
６　小問集合
７　複素数平面
８　微分法･積分法
９　微分法･積分法

後期

１　小問集合（穴埋め）
２　小問集合
３　空間図形
４　確率，数列
５　微分法･積分法

（３）難易度

今年度の難易度としては基本レベルの問題を中心に出題されている。基本的な問題をしっかり解けるようにしてほしいという大学からのメッセージであるとのことであった。

3　問題分析

本校の３年生に入試問題を解いてもらう。３年生の文型生徒に１，２，４，５，理型生徒で教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースを志望の生徒は，それぞれの学部に応じた問題を１～５から選び，理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）医学部を志望の生徒は，それぞれの学部に応じた問題を５～１０から選び，理数科生徒に後期１～５を解いてもらった。採点基準は公表されていないため，定期考査に準じて採点し，得点率と誤答例から分析を行った。

＜前期＞

$\boxed{1}$　次の問いに答えよ。

(1)　２つの集合

$$A=\{x \mid x\text{は整数，}1\leqq x\leqq 1000\}$$
$$B=\{x \mid x\text{は}30\text{と互いに素な自然数}\}$$

の共通部分 $A\cap B$ の要素の個数を求めよ。

(2)　x，yを実数とするとき，次の式を満たす実数 a，bをx，yを用いて表せ。

$$\frac{4^x\times 6^{x+y}\times 12^{x-y}}{16^x\times 9^{2x-3y}}=2^a\times 3^b$$

(3)　１次不定方程式 $275x+61y=1$ のすべての整数解を求めよ。

(4)　$\sin 75^\circ$ の値を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	28.5	30.7	42.9	74.1	44.0
標準偏差	2.5	2.5	2.8	2.4	6.2

【誤答例】

(1)　それぞれの倍数の個数はわかっているが，その個数の合計が計算できていない。
　数え上げようとして途中で断念している。

(2)　指数の計算が正しくできていない。

(3)　ユークリッドの互除法で計算しているが，そこで終わっている。

(4)　$75^\circ=90^\circ-15^\circ$としている。
　加法定理を間違えている。

$\boxed{2}$＜教育学部学校教育教員養成課程中等教育コース自然科学系希望者を除く＞

放物線 $y=-x^2+x+2$ を C とし，C と x 軸との 2 つの交点を A，B とする。ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また，点 P は C 上を A から B まで動く。P が A，B と異なるとき，次の問いに答えよ。

(1) △PAB の面積が最大になるとき，P の座標および△PAB の面積を求めよ。

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。△PAB の面積が $\dfrac{S}{3}$ となる P の座標をすべて求めよ。

(3) 直線 $y=-2x+5$ を ℓ とする。P と ℓ の距離が最小になるとき，P の座標および P と ℓ の距離を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	合計
得点率	92.5	72.8	19.0	59.7
標準偏差	1.7	2.9	3.2	5.5

【誤答例】

(1) 平方完成が間違っている。
　三角形の面積の計算が間違っている。

(2) 2 次方程式の解が間違っている。
　$\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\frac{1}{6}\cdot 3$ としている。
　（3 乗を忘れている。）

(3) 点と直線の距離の公式が間違っている。
　平方完成が間違っている。

$\boxed{3}$＜教育学部（学校教員養成課程中等教育コース自然科学系）＞

次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面において，3 点 A$(1+2i)$，B$(3+4i)$，C(z) が正三角形の頂点となる複素数 z をすべて求めよ。ここ　で，i は虚数単位である。

(2) 2 つの関数

$$f(x)=2x+\sqrt{3}+4\sin x \quad (0\leqq x\leqq\pi)$$
$$g(x)=x+\sqrt{3}-2\sin x \quad (0\leqq x\leqq\pi)$$

がある。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\pi$ で囲まれた部分を D とする。

（i） 関数 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，D を図示せよ。

（ii） D の面積 S を求めよ。

【誤答例】

今年度の解答者は 0 名であった。

$\boxed{4}$＜医学部希望者は除く＞

座標空間内に異なる 4 点 O，A，B，C がある。線分 OB，AB，AC，OC を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ K，L，M，N とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{KM}}=\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ を示せ。

(2) p，q を実数とし，点 O，A，B，C の座標をそれぞれ $(0,0,0)$，$(4,6,0)$，$(1,1,0)$，$(p,3,q)$ とする。

（i） $\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ を p，q を用いて成分で表せ。

（ii） 四角形 KLMN がひし形となるための必要十分条件を p，q の式で表せ。

（iii） 四角形 KLMN 正方形となる p，q を求めよ。

問題番号	(1)	(2)(i)	(ii)	(iii)	合計
文型 得点率	54.6	41.1	12.6	3.7	29.1
文型 標準偏差	3.4	2.7	1.3	1.1	6.8
理型 得点率		65.0	20.6	8.9	46.0
理型 標準偏差		1.7	2.3	0.8	5.1

【誤答例】

理型生徒に提示した問題に 1 部不備があったため，(1) は全員に点を与えている。

(1) 証明になっていない。
　K，L，M，N の位置がわかっていない。

(2)(i) 計算が間違っている。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{KM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=0$ はわかっているが，計算できていない。
　(i) が間違っている。

(iii) $|\overrightarrow{\mathrm{KM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{LN}}|$ はわかっているが，計算できていない。

$\boxed{5}$ A，B，C の 3 人が以下の規則に従って試合を繰り返し行う。各試合において 2 人が対戦し，残りの 1 人は待機する。対戦はどちらか一方が勝利し，引き分けはないものとする。

① 第 1 試合では，A と B が対戦し，C は待機する。

② 第 2 試合では，第 1 試合の勝者と C が対戦し，第 1 試合の敗者は待機する。

③ 同様に，第 $(n+1)$ 試合では，第 n 試合の勝者と第 n 試合で待機した者が対戦し，第 n 試合の敗者は待機する。

A と B が対戦したとき A が勝利する確率は $\dfrac{2}{3}$，

B と C が対戦したとき B が勝利する確率は $\dfrac{1}{2}$， CとAが対戦したときCが勝利する確率は$\frac{1}{3}$である。第n試合において，A，B，Cが待機する確率をそれぞれa_n，b_n，c_nとする。

(1)　次の$\boxed{}$に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

$a_2=\boxed{ア}$，$b_2=\boxed{イ}$，$c_2=\boxed{ウ}$

$c_3=\boxed{エ}$

$a_{n+1}=\boxed{オ}\,b_n+\boxed{カ}\,c_n$

$b_{n+1}=\boxed{キ}\,a_n+\boxed{ク}\,c_n$

$c_{n+1}=\boxed{ケ}\,a_n+\boxed{コ}\,b_n$

(2)　b_n-c_nをnの式で表せ。

(3)　a_nをnの式で表せ。

(4)　b_nをnの式で表せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
文型 得点率	58.2	15.6	3.0	1.5	27.9
文型 標準偏差	2.8	1.9	0.9	0.3	4.9
理型 得点率	80.5	51.7	20.6	8.9	46.0
理型 標準偏差	1.7	1.9	2.3	0.8	5.1

【誤答例】

(1)　c_3が間違っている。
　問題文が正確に読めていない。

(2)　初項をb_2-c_2にしている。
　$-\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$としている。

(3)　a_nについての漸化式が作れていない。

(4)　a_nがわかっていないため，b_n+c_nが求められていない。

6　次の問いに答えよ。

(1)　極限

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+1}$$

を求めよ。

(2)　$f(x)=\log_x 2\quad(x>1)$を微分せよ。

(3)　定積分

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x}$$

を求めよ。

(4)　数列$\{a_n\}$の一般項が

$$a_n=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

であるとき，$\lim_{n\to\infty}\log a_n$を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	25.3	27.3	57.3	30.7	35.2
標準偏差	2.0	2.0	2.4	2.2	5.3

【誤答例】

(1)　そのまま極限を求めようとして，計算ができていない。
　$t=-x$と置き換えているが，分子分母をt^2で割る際に計算が間違っている。

(2)　底を2に変換したのち，微分できていない。
　底をeに変換したのち，微分できていない。

(3)　部分積分をしてしまっている。
　$\int\frac{du}{u}=\log u-u$としている。
　（$\log x$の微分と積分が混ざっている。）

(4)　$\int_0^1\log(1+x)\,dx=\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1$で計算している。
　$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\log\sum_{k=1}^{n}a_n$と式を変形している。

7　$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$とおく。ここで，$i$は虚数単位である。

(1)　αの絶対値$|\alpha|$および偏角θを求めよ。ただし，θの範囲は$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(2)　$\beta=2\left(\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi\right)$とおき，$\beta$，$\alpha\beta$，$\alpha^2\beta$に対応する複素数平面上の点をそれぞれ$P_1$，$P_2$，$P_3$とする。このとき，$\triangle P_1P_2P_3$の面積を求めよ。

(3)　$\gamma=-1+4\alpha$とおき，γ，γ^2，γ^3に対応する複素数平面上の点をそれぞれQ_1，Q_2，Q_3とする。

（ⅰ）　$\angle Q_2Q_1Q_3$を求めよ。

（ⅱ）　$\triangle Q_1Q_2Q_3$の面積を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)(ⅰ)	(ⅱ)	合計
得点率	94.2	35.3	16.7	6.7	33.8
標準偏差	0.8	2.4	1.9	1.5	4.6

【誤答例】

(1)　極形式へ直す際に，偏角を間違えている。

(2)　図形的な解釈ができておらず，三角形の形状が見えていない。

(3)(ⅰ)　$\frac{\gamma^3-\gamma}{\gamma^2-\gamma}$の計算が間違っている。

（ⅱ）　無回答。

$\boxed{8}$　a を定数とし，

$$f(x)=x+a+2\sin x \quad (0\leqq x\leqq \pi)$$
$$g(x)=x+a-2\sin x \quad (0\leqq x\leqq \pi)$$

とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分を D とする。

(1)　関数 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べよ。さらに，$a=\sqrt{3}$ のとき，D を図示せよ。

(2)　曲線 $y=g(x)$ が x 軸と接しているとき，a の値を求めよ。このとき，D を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	合計
得点率	86.9	32.9	65.3
標準偏差	2.5	2.7	4.1

【誤答例】

(1)　増減表が間違っている。
$f''(x)$，$g''(x)$ の符号が間違っている。

(2)　a の値を求めて終わっている。
V の立式はできているが，計算ができていない。

$\boxed{9}$＜医学部＞

$$f(x)=\frac{\log x}{x^x} \quad (x>0)$$ とおく。

(1)　$f(x)$ を微分せよ。

(2)　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$a<\sqrt{3}$ であることを示せ。

(3)　$\sqrt{3}^{(\sqrt{5}^{\sqrt{5}})}$ と $\sqrt{5}^{(\sqrt{3}^{\sqrt{3}})}$ の大小を比較せよ。

【誤答例】

本年度の解答者は1名であった。

＜後期＞

$\boxed{1}$　次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 3+0}\frac{9-x^2}{\sqrt{(3-x)^2}}=\boxed{ア}$ である。

(2)　関数 $f(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}$ の導関数は $f'(x)=\boxed{イ}$ である。

(3)　関数 $g(x)=e^{1+\log(2+\cos 3x)}$ の導関数は $g'(x)=\boxed{ウ}$ である。

(4)　$\displaystyle\int_0^1 xe^x dx=\boxed{エ}$ である。

(5)　関数 $h(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x} e^{t^2}dt$ の導関数は $h'(x)=\boxed{オ}$ である。

(6)　座標平面上を移動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=t-\sin t\ ,\quad y=1-\cos t$$

で表されるとき，時刻 t における点Pの速度ベクトルは

$$\vec{v}=\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right)$$

であり，加速度ベクトルは

$$\vec{\alpha}=\left(\boxed{ク},\ \boxed{ケ}\right)$$

である。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6) $\vec{v}$	(6) $\vec{\alpha}$	合計
得点率	13.2	47.4	28.9	65.8	18.4	55.3	39.5	36.4
標準偏差	1.0	1.5	1.4	1.4	1.6	1.0	1.0	5.7

【誤答例】

(1)　6

(2)　$\frac{1}{2}x^2e^{\frac{1}{2}x^2}$，$2xe^{\frac{1}{2}x^2}$

(3)　$-3\sin 3x\cdot e^{1+\log(2+\cos 3x)}$

(4)　$e-1$，$\frac{1}{2}e$

(5)　e^{x^2}，0

(6)　$\vec{v}=(1+\cos t\ ,\ -\sin t)$
$\vec{\alpha}=(-\sin t\ ,\ \cos t)$

$\boxed{2}$　次の問いに答えよ。

(1)　s，t を実数とする。2つのベクトル

$$\vec{u}=(s,\ t,\ 3),\ \vec{v}=(t,\ t,\ 2)$$

のなす角がどのような t に対しても鋭角となるための必要十分条件を s を用いて表せ。

(2)　複素数 z が $|z|=\sqrt{3}$ を満たし，さらに $z-i$ の偏角が $\frac{\pi}{6}$ であるとき，z を求めよ。ここで，i は虚数単位である。

(3)　等比数列 $\{a_n\}$ が $a_2=-1$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{4}{3}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　不定積分 $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+x-6}dx$ を求めよ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	27.9	11.6	21.6	23.2	21.1
標準偏差	1.9	1.4	1.7	2.0	5.6

【誤答例】

(1)　条件 $st+t^2+6>0$ はわかっているが，『どのような t に対しても』の対処がわかっていな

い。
(2)　意味がわかっていない。
(3)　$|r|<1$ が抜けている。
　$r=-\dfrac{1}{2}$ まではできているが，初項が間違えている。
(4)　積分定数が抜けている。
　部分分数に分けられていない。

$\boxed{3}$　k を実数とする。座標空間において半径が1で中心が(0，0，0)，(2，0，1)，(0，2，1)である3つの球の平面 $z=k$ による切り口の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とおく。ただし，平面が球と交わらない場合または接する場合の切り口の面積は0とする。
(1)　$S_1>0$ となる k の値の範囲を求め，その範囲で S_1 を k を用いて表せ。
(2)　$S=S_1+S_2+S_3$ とする。$S>0$ のとき，次の問いに答えよ。
(ⅰ)　k の取り得る値の範囲を求めよ。
(ⅱ)　S を k を用いて表せ。
(ⅲ)　k が(ⅰ)で求めた範囲を動くとき，S の最大値を求めよ。

問題番号	(1)	(2)(ⅰ)	(ⅱ)	(ⅲ)	合計
得点率	66.4	52.6	26.3	19.1	38.2
標準偏差	1.3	1.9	3.4	1.5	6.4

【誤答例】
　球の位置関係が理解できていない。
(1)　S_1 の半径が間違っている。
(2)(ⅰ)　$0<k<1$ としている。
(ⅱ)　各球の断面の半径が間違っている。
(ⅲ)　(ⅱ)が間違っている。

$\boxed{4}$　正十二面体のさいころの各面に
　1，2，3，4，5，6，
　−1，−2，−3，−4，−5，−6
が1つずつ書かれている。このさいころを繰り返し投げ，n 回目に出た数を k_n とする。$z_0=1$ とし，z_n を

$$z_n=\left(\cos\frac{k_n\pi}{6}+i\sin\frac{k_n\pi}{6}\right)z_{n-1}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ここで，i は虚数単位である。
　p_n を $z_n=1$ である確率，q_n を $z_n=-1$ である確率，r_n を z_n が実数でない確率とする。
(1)　q_1，r_1，p_2 を求めよ。
(2)　p_{n+1}，q_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いて表せ。
(3)　p_n-q_n を n の式で表せ。
(4)　p_n を n の式で表せ。

問題番号	(1)	(2)	(3)	(4)	合計
得点率	40.2	20.4	14.5	7.9	23.0
標準偏差	2.6	1.6	1.4	1.3	5.8

【誤答例】
　複素数平面に惑わされて，問題の本質が理解できていない。
(1)　p_2 が間違っている。
(2)，(3)，(4)　無回答。

$\boxed{5}$　$f(x)=\log(1+x^2)$ とする。
(1)　曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べ，変曲点を求めよ。
(2)　曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標のうち最大のものを a とする。また，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=f(a)$ で囲まれた部分を D とする。
(ⅰ)　$x=\tan\theta$ とおいて，定積分 $\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ。
(ⅱ)　D の面積 S を求めよ。
(ⅲ)　D を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

問題番号	(1)	(2)(ⅰ)	(ⅱ)	(ⅲ)	合計
得点率	47.8	32.6	7.9	3.9	25.3
標準偏差	2.5	2.2	1.1	0.7	5.2

【誤答例】
(1)　微分が間違っている。
　$f'(x)$ や $f''(x)$ の符号が間違っているため，増減表，グラフがかけていない。
　変曲点が $x=\pm1$ となっており，座標になっていない。
(2)(ⅰ)　(1)が間違っており，a の値が出ていない。
(ⅱ)　立式はできているが，計算ができていない。
(ⅲ)　x の範囲と y の範囲が混ざっている。

4　おわりに

　１０月中旬に実施したこともあり，全体的にあまりできていなかった。ただし，問題自体は前期，後期ともに基礎的な内容が多く，例年に比べて各大問の最後の問題まで取り組めている生徒が多かった。理型においては，微分･積分の基礎基本を徹底して指導しておくと良いと思われる。説明会でも土屋教授から，大学からのメッセージとして「基本的な問題をしっかり解けるようにしてください」と言われた。ただし，前期 $\boxed{4}$，$\boxed{5}$，後期 $\boxed{4}$ については，数学という

よりは，読解力の問題であった。文章を正確に理解して，整理し，解答を作る必要がある。前期$\boxed{5}$，後期$\boxed{4}$は確率と漸化式を組み合わせた問題であり，この形式の問題は他大学でも多く出題されているため，対策が必要である。また，前期$\boxed{4}$，後期$\boxed{3}$では受験生が苦手とする空間図形についての問題が与えられている。空間図形のイメージをしっかり持たせた上で解答に臨ませていきたいと感じた。

さらに，解説の中で土屋教授から「定理があっても証明がないものは，解答を見ていてアレッ？と思うことがある。例えば，ロピタルの定理であったり，積分の計算における

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を証明なく使っているものに対して，減点するかどうか迷うことがある。計算できるものはちゃんと計算してもらいたい。」とのことであった。何気なく教えているテクニック的な準公式については，解答の中で使う際には気を付けるよう指導するべきであると感じた。

今回の答案の採点や定期考査の採点を通して，メモ書きや計算だけを羅列している答案が多いように感じる。自分の考えを正確に分かりやすく表現する国語力も必要であると改めて感じた。上辺だけの知識や解法を覚えて使うだけでなく，内容をきちんと深く理解することが大切であり，そのような取組が自分の考えを表現することにつながると考える。

今後はただ目の前の答え正誤だけに目を向けるのではなく，その解答の内容やプロセスまでしっかり考えさせる指導をしていかなければならないと強く感じた。