国公立大学入試問題の研究

－無限級数の種々の問題－

愛媛県立松山東高等学校　　松　浦　　　正

1　はじめに

数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，無限級数を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表すことは受け入れやすい定義であるが，生徒たちは，これが無限数列の項すべてを足し合わせた総和であると勘違いしてしまうことも少なくない。そのため，その勘違いから生じた感覚のズレに違和感を感じてしまい，無限級数の収束・発散の判定問題にも苦手意識を持ってしまうのかもしれない。

本研究では，無限級数の和の意味と収束・発散の判別方法を確認しながら，過去３年間の入試問題に焦点を当て，様々な解法パターンを分析することで，今後の指導に役立てていきたいと思い，この研究テーマを設定した。

２　無限級数の収束と発散

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ を無限級数または級数という。収束・発散については，第 n 部分和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ を考え，数列 $\{S_n\}$ すなわち S_1，S_2，S_3，……，S_n，…… が有限確定の値 S に収束するとき，級数は収束して，和は S であるという。このとき， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ と書く。 数列 $\{S_n\}$ が収束しない（ ∞， $-\infty$，振動）とき，級数は発散する，または，和をもたないという。

S_n の計算は，有限項数であるから，交換法則，結合法則は成り立つ。しかし，無限級数の和は，普通の加法の和ではなく，極限値，すなわち，項を多くとればとるほど近づいてゆく目標値であるため，次の例で示すように，かっこでくくったり，順序を変更したりすると極限値が変わってしまうことがある。したがって，無限級数の和の求め方は，部分和 S_n を求め， $n \to \infty$ とするのが基本である。

問題　次の無限級数の収束・発散を判定せよ。

① $1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$

n が奇数のとき， $S_n=1$

n が偶数のとき， $S_n=0$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$，または，0 で不定　　ゆえに，発散

② $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots$

$S_n = 0+0+0+\cdots\cdots+0=0$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$　　ゆえに，収束

③ $1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\cdots$

$S_n = 1+0+0+\cdots\cdots+0=1$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$　　ゆえに，収束

④ $1+(-1-1)+(1+1+1)+(-1-1-1-1)+\cdots\cdots$

$S_n = 1-2+3-4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n$

n が奇数のとき，

$$S_n = (1-2)+(3-4)+\cdots\cdots+(n-1+n) = -\frac{n}{2}$$

n が偶数のとき，

$$S_n = 1+(-2+3)+(-4+5)+\cdots+(-n+1+n) = \frac{n+1}{2}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$，または，$\infty$ で不定　　ゆえに，発散

３　大学入試問題の分析

◎ 恒等式を利用したやや複雑な式変形を行う問題

＜２０１５　神戸大学　＞ a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする。 (1)　$x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ。 (2)　$b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ。また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ。 (3)　無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ。

【解法の分析】恒等式の考え方を利用する。

(1)　$$\frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)} = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3}$$

両辺に $k(k+1)(k+3)$ を掛けると

$$2ak+6b = p(k+1)(k+3)+qk(k+3)+rk(k+1)$$

すなわち　$2ak+6b = (p+q+r)k^2+(4p+3q+r)k+3p$

よって，$x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つとき

$0 = p+q+r$，$2a = 4p+3q+r$，$6b = 3p$

ゆえに　　$p=2b$，$q=a-3b$，$r=-a+b$

(2)　$b=0$ のとき，(1) から　　$p=0$，$q=a$，$r=-a$

このとき　　$x_k=\dfrac{a}{k+1}-\dfrac{a}{k+3}=a\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)$

したがって，$n\geqq 3$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=a\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=a\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\quad\cdots\cdots ①$$

$a=0$ のとき，(1) から，$p=2b$，$q=-3b$，$r=b$

$$x_k=\frac{2b}{k}-\frac{3b}{k+1}+\frac{b}{k+3}=b\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=b\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=2b\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-b\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\quad\cdots ②$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

また，$n\geqq 3$ のとき，① から

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

ゆえに，$n\geqq 4$ のとき，② から

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-b\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\quad\cdots ③$$

(3)　(1) から，$x_k=\dfrac{2b}{k}+\dfrac{a-3b}{k+1}+\dfrac{-a+b}{k+3}$

$$x_k=a\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)+b\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$

よって，①，③ から，4 以上の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n}x_k$$

$$=a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)+b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=a\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$+b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

ゆえに，　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{5}{6}a+\frac{7}{6}b$

類題　＜２０１６　岐阜大＞

n を正の整数，α を正の実数とし，

$S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+3}{}_n\mathrm{C}_k$，$I_\alpha=\displaystyle\int_0^1 t^\alpha(1-t)^2dt$ とする。

ただし，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(1)　I_α の値を求めよ。

(2)　$I_\alpha=\displaystyle\int_0^1 t^2(1-t)^\alpha dt$ を示せ。

(3)　$S_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}$ を示せ。

(4)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の和を求めよ。

◎ 漸化式との融合問題

＜２０１７　千葉大＞

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_5 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ が収束することを示し，その和を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$a_2=1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=3$，$a_3=1+\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)}=7$

$$a_4=1+\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}\right)}=43,$$

$$a_5=1+\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{43}\right)}=1807$$

(2)　$\boxed{方針}$　番号を1つずらし，2 式の辺々を引くことで漸化式を導く。

$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$ から　　$a_{n+1}\neq 1$

よって，$n\geqq 2$ のとき　　$a_n\neq 1$

また，$a_1=2$ であるから，$n\geqq 1$ のとき　　$a_n\neq 1$

ゆえに　　$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$　$\cdots\cdots$ ①

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{a_n-1}=1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k}\quad\cdots\cdots ②$$

①－② から，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=-\frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}$$

よって　　$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1$

(3)　$a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$ であるから　　$a_{n+1}>a_n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は増加数列である。

ゆえに　　$a_n>a_1=2$

したがって　　$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)>2(a_n-1)$

よって　　$a_n>2^{n-1}+1$

※　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{n-1}+1)=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

また，与えられた条件から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}$$

ゆえに　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ は収束し，その和は，1

※ 極限と大小関係

$a_n \leqq b_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）のとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$　ならば　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

＜２０１６　群馬大＞

a は $0<a<1$ を満たす定数とし，また n は正の整数とする。

$\displaystyle R_n=n\int_0^a\frac{(a-x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}dx$　とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$n=1$ のときは $(a-x)^{n-1}=1$ とする。

(1)　R_1 と R_2 を求めよ。

(2)　R_n を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}R_n$ の和を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$\displaystyle R_1=\int_0^a\frac{1}{(1-x)^2}dx$

$$=\int_0^a(1-x)^{-2}dx=\Big[(1-x)^{-1}\Big]_0^a$$

$$=\frac{1}{1-a}-1=\frac{a}{1-a},$$

$$R_2=2\int_0^a\frac{a-x}{(1-x)^3}dx$$

$$=2\int_0^a(a-x)(1-x)^{-3}dx$$

$$=\int_0^a(a-x)\{(1-x)^{-2}\}'dx$$

$$=\Big[(a-x)(1-x)^{-2}\Big]_0^a-\int_0^a(-1)\cdot(1-x)^{-2}dx$$

$$=-a+R_1=-a+\frac{a}{1-a}=\frac{a^2}{1-a}$$

(2)　$\boxed{方針}$　定積分を部分積分法により計算する中で，$\{R_n\}$ についての漸化式を作る。

$$R_{n+1}=(n+1)\int_0^a\frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}dx$$

$$=(n+1)\int_0^a(a-x)^n(1-x)^{-(n+2)}dx$$

$$=\int_0^a(a-x)^n\{(1-x)^{-(n+1)}\}'dx$$

$$=\Big[(a-x)^n(1-x)^{-(n+1)}\Big]_0^a$$

$$-\int_0^a\{-n(a-x)^{n-1}\}(1-x)^{-(n+1)}dx$$

$$=-a^n+n\int_0^a\frac{(a-x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}dx=-a^n+R_n$$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$R_n=R_1-\sum_{k=1}^{n-1}a^k=\frac{a}{1-a}-\frac{a(1-a^{n-1})}{1-a}$$

$$=\frac{a^n}{1-a}\quad\cdots ①$$

$\displaystyle R_1=\frac{a}{1-a}$ より，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\displaystyle R_n=\frac{a^n}{1-a}$

$\boxed{別解}$　(2)　$\displaystyle\left(\frac{x-a}{x-1}\right)'=\frac{1\cdot(x-1)-(x-a)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{a-1}{(x-1)^2}$

$$R_n=n\int_0^a\frac{(a-x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}dx$$

$$=n\int_0^a\left(\frac{a-x}{1-x}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx$$

$$=n\int_0^a\left(\frac{x-a}{x-1}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{a-1}\cdot\left(\frac{x-a}{x-1}\right)'dx$$

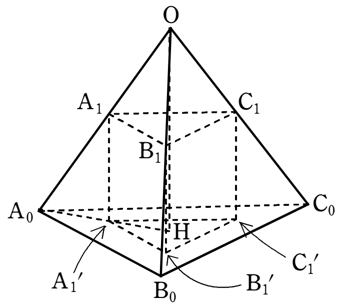
$$=n\left[\frac{1}{n(a-1)}\cdot\left(\frac{x-a}{x-1}\right)^n\right]_0^a=\frac{-a^n}{a-1}=\frac{a^n}{1-a}$$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}R_n$ は，初項 $\dfrac{a}{1-a}$，公比が a の無限等比級数で，$0<a<1$ であるから収束する。

その和は，　$\dfrac{\frac{a}{1-a}}{1-a}=\dfrac{a}{(1-a)^2}$

＜２０１７　神戸大＞

1辺の長さが a_0 の正四面体 $OA_0B_0C_0$ がある。図のように，辺 OA_0 上の点 A_1，辺 OB_0 上の点 B_1，辺 OC_0 上の点 C_1 から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線をそれぞれ A_1A_1'，B_1B_1'，C_1C_1' としたとき，三角柱 $A_1B_1C_1-A_1'B_1'C_1'$ は正三角柱になるとする。ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする。同様に，点 A_2，B_2，C_2，A_2'，B_2'，C_2'，… を次のように定める。正四面体 $OA_kB_kC_k$ において，辺 OA_k 上の点 A_{k+1}，辺 OB_k 上の点 B_{k+1}，辺 OC_k 上の点C_{k+1}から平面 $A_kB_kC_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $A_{k+1}A_{k+1}'$，$B_{k+1}B_{k+1}'$，$C_{k+1}C_{k+1}'$ としたとき，
三角柱 $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}-A_{k+1}'B_{k+1}'C_{k+1}'$ は正三角柱になるとする。



辺 A_kB_k の長さを a_k とし，正三角柱 $A_kB_kC_k-A_k'B_k'C_k'$ の体積を V_k とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 O から平面 $A_0B_0C_0$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta=\angle OA_0H$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　a_1 を a_0 を用いて表せ。

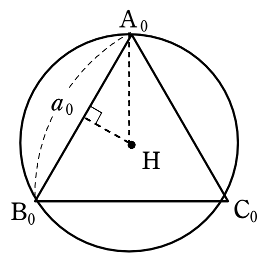
(3)　V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V_k$ を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$\triangle OA_0H$，$\triangle OB_0H$，$\triangle OC_0H$ はすべて合同な直角三角形であるから

$A_0H=B_0H=C_0H$

よって，点 H は正三角形 $A_0B_0C_0$ の外心である。



したがって，$A_0H=\dfrac{a_0}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a_0$

また，三平方の定理により

$$OH=\sqrt{OA_0{}^2-A_0H^2}$$

$$=\sqrt{a_0{}^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_0\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a_0=\frac{\sqrt{6}}{3}a_0$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{A_0H}{OA_0}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\theta=\dfrac{OH}{OA_0}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(2)　$\boxed{\text{方針}}$　図形の性質を用いて，体積 V_k を表す数列 $\{V_k\}$ の漸化式を作る。

正四面体 $OA_1B_1C_1$ の1辺の長さを a_1 とすると

$A_1A_1'=B_1B_1'=C_1C_1'=a_1$

また，$A_1A_1'=(a_0-a_1)\sin\theta$ であるから

$(a_0-a_1)\sin\theta=a_1$

よって，

$$a_1=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}a_0$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}}a_0$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}a_0=\frac{\sqrt{6}(3-\sqrt{6})}{3}a_0=(\sqrt{6}-2)a_0$$

(3)　正三角柱 $A_kB_kC_k-A_k'B_k'C_k'$ を T_k と表す。

T_k の1辺の長さはすべて等しいから，(2) と同様に考えると，T_k と T_{k+1} の相似比は，　$1:(\sqrt{6}-2)$

よって，体積比は，　$1:(\sqrt{6}-2)^3$

ゆえに，$V_{k+1}=(\sqrt{6}-2)^3V_k$

また，$V_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a_1{}^2\cdot a_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a_1{}^3=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)^3}{4}a_0{}^3$

ここで，$(\sqrt{6}-2)^3=18\sqrt{6}-44$

したがって，数列 $\{V_k\}$ は初項 $\dfrac{\sqrt{3}(18\sqrt{6}-44)}{4}a_0{}^3$，公比 $18\sqrt{6}-44$ の等比数列であるから

$$V_k=\frac{\sqrt{3}(18\sqrt{6}-44)^k}{4}a_0{}^3$$

$2<\sqrt{6}<3$ より，$0<18\sqrt{6}-44<1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty}V_k=\frac{\dfrac{\sqrt{3}(18\sqrt{6}-44)}{4}a_0{}^3}{1-(18\sqrt{6}-44)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(18\sqrt{6}-44)}{4(45-18\sqrt{6})}a_0{}^3$$

$$=\frac{\sqrt{3}(9\sqrt{6}-22)}{18(5-2\sqrt{6})}a_0{}^3=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18}a_0{}^3$$

類題　＜２０１７　名古屋工業大＞

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす定数とし，自然数 n に対して $a_n=\tan\dfrac{\theta}{2^n}$ とおく。

(1)　数列 $\{2^na_n\}$ の極限を求めよ。

(2)　n が2以上のとき $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{2}{a_{n-1}}=a_n$ が成り立つことを示せ。

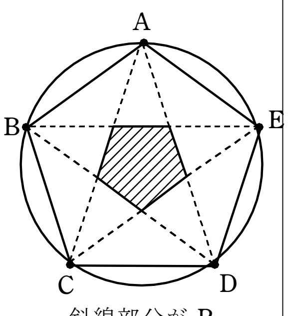
(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ とおく。n が2以上のとき S_n を a_1 と a_n で表せ。

(4)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ の和を求めよ。

◎ ベクトルとの融合問題

＜２０１６　大阪大＞

円上の５点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を５等分している。５点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする。



斜線部分が R_2

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

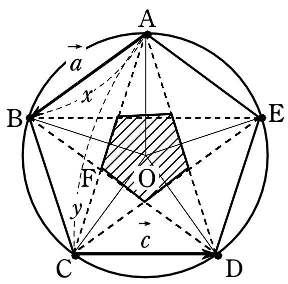
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の５つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の１辺の長さを x を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の５つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$ を求めよ。

【解法の分析】



(1)　正五角形 ABCDE の外接円の中心を O とすると，

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2\pi}{5}$ であるから，

円周角の定理により

$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{5}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$ の二等辺三角形であるから，

$\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{5}$，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{5}\pi$

また，線分 AC と線分 BD の交点を F とすると，

$\angle\mathrm{CBF}=\angle\mathrm{BCF}=\dfrac{\pi}{5}$ より，$\triangle\mathrm{CFB}$ は $\mathrm{CF}=\mathrm{FB}$ の二等辺三角形であるから

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=\angle\mathrm{FCB}=\angle\mathrm{FBC}=\dfrac{\pi}{5}$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{CFB}$

ゆえに，$\mathrm{AB}:\mathrm{CF}=\mathrm{AC}:\mathrm{CB}$

したがって，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CB}=\mathrm{CF}\cdot\mathrm{AC}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{CB}=x$，$\mathrm{AC}=y$，$\mathrm{CF}=\mathrm{AC}-\mathrm{AF}=y-x$ であるから　　$x^2=y(y-x)$

(2)　$\mathrm{AB}/\!/\mathrm{EC}$，$\mathrm{CD}/\!/\mathrm{BE}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CD}}\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{y}{x}(\vec{a}+\vec{c})$

(1) より，$y^2-xy-x^2=0$ $(x>0,\ y>0)$ であるから

$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}-1=0$

これと $\dfrac{y}{x}>0$ より，$\dfrac{y}{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

(3)　R_2 の１辺の長さは，

$\mathrm{AC}-2\cdot\mathrm{CF}=y-2(y-x)$

$$=2x-y=\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　(3) より，R_1 と R_2 の相似比は $1:\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ であり，R_n と R_{n+1} の相似比は，これと等しい。

よって，$S_{n+1}=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2S_n=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$

ゆえに，$S_n=\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}S_1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$ であり，これは初項 1，公比 $-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ の無限等比級数と等しい。

$-1<-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}<0$ であるから，この無限等比級数は収束し，求める極限値は，

$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

類題　＜２０１５　島根大＞

n を自然数，t を正の実数とする。

$\mathrm{A}_n\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,t}{2^n},\ \dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{1}{2^n}\right)$，$\mathrm{B}_n\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2^{\mathrm{n}}},\ \dfrac{t}{2^n},\ \dfrac{t}{2^n}\right)$，

$\mathrm{C}_n\left(0,\ \dfrac{3\cdot2^n}{\sqrt{2}\,t},\ -\dfrac{3\cdot2^n}{\sqrt{2}\,t}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，O は座標空間の原点を表す。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ をそれぞれ求めよ。

(2) 四面体 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の体積を t を用いて表せ。

(3) (2) で求めた体積が最小となる t の値と，その最小値 V_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ の値を求めよ。

◎ 確率との融合問題

＜２０１６　福井大＞

表の出る確率が r，裏の出る確率が $1-r$ であるコインがある。このコインを繰り返し投げ，表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値が 2 になったときにコイン投げを終了する。ちょうど $2n$ 回で終了する確率を p_n とし，$2n$ 回以下で終了する確率を q_n とする。ただし，n は正の整数とする。

(1)　p_n を求めよ。

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ の和を求めよ。

ただし，$0 \leqq s < 1$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} ns^n = 0$ であることを用いてもよい。

(3)　$r=\dfrac{1}{4}$ のとき，$q_n \geqq 0.999$ となる最小の n を求めよ。

必要であれば，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ として計算せよ。

【解法の分析】

(1)　ちょうど $2n$ 回でコイン投げが終了するのは，「表裏」または「裏表」を $(n-1)$ 回繰り返し，最後の 2 回は「表表」または「裏裏」となるときであるから，

$p_n = \{r(1-r)+(1-r)r\}^{n-1}\cdot\{r^2+(1-r)^2\}$

$\quad = \{2r(1-r)\}^{n-1}(2r^2-2r+1)$

(2)　$a=2r^2-2r+1$，$s=2r(1-r)$ とおくと，

$p_n = as^{n-1}$

自然数 N に対して，$S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} np_n$ とおくと

$$S_N = a+2as+\cdots+Nas^{N-1}$$

$$sS_N = \qquad as+\cdots+(N-1)as^{N-1}+Nas^N$$

辺々を引いて，

$(1-s)S_N = a+as+\cdots+as^{N-1}-Nas^N$

ここで，$s=-2\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ で，$0 \leqq r \leqq 1$ であるから，$0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}$

よって，$(1-s)S_N = \dfrac{a(1-s^N)}{1-s}-Nas^N$ から

$S_N = \dfrac{a(1-s^N)}{(1-s)^2}-\dfrac{Nas^N}{1-s}$

また，$0 \leqq s < 1$ より　$\displaystyle\lim_{N\to\infty} s^N = \lim_{N\to\infty} Ns^N = 0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{a}{(1-s)^2} = \frac{1}{2r^2-2r+1}$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{1}{2r^2-2r+1}$

(3)　$2n$ 回以下でコイン投げが終了しないのは，「表裏」または「裏表」を n 回繰り返すときであるから

$q_n = 1-\{2r(1-r)\}^n$

$\quad = 1-\left\{2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\right\}^n = 1-\left(\dfrac{3}{8}\right)^n$

$q_n \geqq 0.999 = 1-10^{-3}$ から，　$\left(\dfrac{3}{8}\right)^n \leqq 10^{-3}$

両辺の常用対数をとって，$n\log_{10}\dfrac{3}{8} \leqq -3$ … ①

ここで，$\log_{10}\dfrac{3}{8} = \log_{10}3-3\log_{10}2$

$\qquad = 0.4771-3\times0.3010 = -0.4259$

ゆえに，①から，$0.4259n \geqq 3$

したがって，$n \geqq \dfrac{3}{0.4259} = 7.04\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は，$n=8$

＜２０１５　九州大＞

数直線上で，座標が整数 k である点を整数点 k とよぶことにする。ある人が硬貨を投げながら次の規則に従って数直線上を移動している。

(規則)　整数点 k にいるとき，硬貨を 1 回投げて
表が出たら整数点 $k+1$ へ，
裏が出たら整数点 $k-1$ へ移動する。

原点 0 から出発し，n 回硬貨を投げて移動し終わったとき，原点 0 にいる確率を P_n とする。

(1)　$P_n=0$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ。

(2)　m を自然数とする。

等式 $P_{2m} = \dfrac{(2m-1)(2m-3)\cdots\cdots1}{2m(2m-2)\cdots\cdots2}$ が成り立つことを示せ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} P_{2m}$ は発散することを示せ。

【解法の分析】

(1)　n 回投げて移動し終わったとき，原点 0 にいるのは，表が出た回数と裏が出た回数が等しいときである。このとき，

$n=$(表が出た回数)$+$(裏が出た回数)

$\quad =2\times$(表が出た回数) であるから，n は偶数である。

よって，n が奇数である場合は，n 回投げて移動し終わったとき，原点 0 にはいない。

すなわち，　n が奇数 $\Longrightarrow$ $P_n=0$　… ①

また，n が偶数とすると，n 回投げて表が $\dfrac{n}{2}$ 回，裏が $\dfrac{n}{2}$ 回出れば，移動し終わったとき原点 0 にいる。

よって，原点 0 にいる確率は 0 より大きい。

ゆえに，　n が偶数 $\Longrightarrow$ $P_n \neq 0$

対偶も真であるから，$P_n=0$ $\Longrightarrow$ n が奇数　… ②

①，② から，$P_n=0$ となるための n に関する必要十分条件は，n が奇数であることである。

(2)　$2m$ 回硬貨を投げて移動し終わったとき，原点 0 にいるのは，表が m 回，裏が m 回出たときである。
したがって，

$$P_{2m}={}_{2m}\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^m=\frac{(2m)!}{m!\,m!}\cdot\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{2^m}$$

$2^m m!=2^m m(m-1)\cdots\cdots 1=2m(2m-2)\cdots\cdots 2$ であることに注意すると

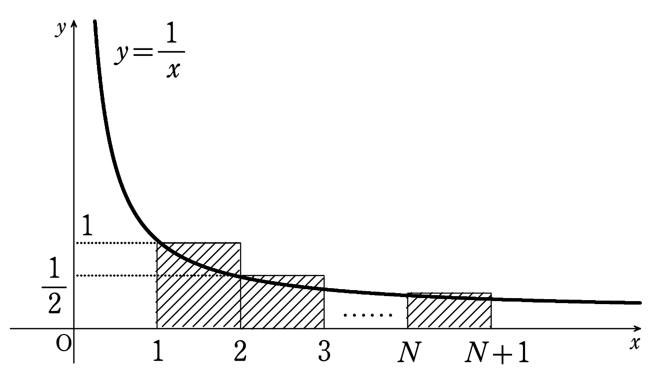
$$P_{2m}=\frac{(2m)!}{2^m m!\cdot 2^m m!}$$
$$=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots\cdots 1\times 2m(2m-2)\cdots\cdots 2}{\{2m(2m-2)\cdots\cdots 2\}^2}$$
$$=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots\cdots 2}$$

(3)　$$P_{2m}=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots\cdots 2}$$
$$=\frac{1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{2m-2}\cdot\frac{2m-3}{2m-4}\cdots\cdots\frac{3}{2}$$
$$>\frac{1}{2m}\cdot 1\cdot 1\cdots\cdots 1=\frac{1}{2m}$$

$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}P_{2m}$ が発散することを示すためには，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$ が発散することを示せばよい。

＜面積を利用した考え方＞

N が自然数のとき，$\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{N}$ は，下の図の斜線部分の面積の和に等しい。



図から，$\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}>\int_1^{N+1}\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle\int_1^{N+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log|x|\Big]_1^{N+1}=\log(N+1)$ であるから

$\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}>\log(N+1)$

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\log(N+1)=\infty$ であるから，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}$ すなわち，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$ は発散する。

以上から，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}P_{2m}$ は発散する。

類題　＜２０１６　名古屋市立大＞

A，B の 2 人で交互にボールを的に向かって投げるゲームを行う。先にボールを的に当てたほ方を勝ちとし，ゲームを終了する。A がボールを 1 回投げて的に当たる確率は p，B がボールを 1 回投げて的に当たる確率は q である。ただし，$0<p<1$，$0<q<1$ である。A を先攻とし，A の最初の投球を 1 回目，次の B の投球を 2 回目，…… と数える。
次の問いに答えよ。

(1)　n 回目の投球で A がゲームに勝つ確率を求めよ。
(2)　A がゲームに勝つ確率を求めよ。
(3)　B がゲームに勝つ確率が，A が勝つ確率より高くなるときの p，q の条件を求めよ。また，その条件を満たす $(p,\ q)$ の領域を横軸 p，縦軸 q の座標平面に図示せよ。

◎ 複素数平面との融合問題

＜２０１７　茨城大＞

α を複素数の定数とし，自然数 n に対して複素数 z_n を $z_1=0$，$z_{n+1}=\alpha z_n+1-\alpha$ で定める。

(1)　z_2，z_3，z_4 をそれぞれ α を用いて表せ。
(2)　一般の n について z_n を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。以下では，$\alpha=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位を表し，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。
(3)　$\dfrac{\theta}{\pi}$ が無理数であるとき，どんな自然数 n に対しても z_{n+1} は実数にならないことを示せ。
(4)　自然数 n に対して，複素数平面上の 2 点 z_n と z_{n+1} との距離を l_n とする。無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ の和 L を求めよ。さらに，θ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲を動くとき，L の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

【解法の分析】

(1)　$z_2=\alpha\cdot 0+1-\alpha=1-\alpha$

$z_3=\alpha(1-\alpha)+1-\alpha=1-\alpha^2$

$z_4=\alpha(1-\alpha^2)+1-\alpha=1-\alpha^3$

(2)　(1) の結果から，$n\geqq 2$ のとき $z_n=1-\alpha^{n-1}$ であると推測できる。これを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=2$ のとき，$z_2=1-\alpha$ であるから，成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，$z_k=1-\alpha^{k-1}$ と仮定すると

$z_{k+1}=\alpha(1-\alpha^{k-1})+1-\alpha=1-\alpha^k$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，2 以上の自然数 n について

$z_n=1-\alpha^{n-1}$

よって　　$z_1=0$，$z_n=1-\alpha^{n-1}\ (n\geqq 2)$

(3)　$z_{n+1}=1-\alpha^n=1-\dfrac{1}{2^n}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$=1-\frac{1}{2^n}\cos n\theta-\frac{i}{2^n}\sin n\theta$$

ある自然数 n に対して z_{n+1} が実数になるとき

$\sin n\theta=0$

このとき，$n\theta=k\pi$ (k は整数) であるから $\dfrac{\theta}{\pi}=\dfrac{k}{n}$ となり，$\dfrac{\theta}{\pi}$ は有理数である。

対偶をとると，$\dfrac{\theta}{\pi}$ が無理数であるとき，すべての自然数 n に対して z_{n+1} は実数でない。

(4)　$\alpha\fallingdotseq 0$ より $z_n=1-\alpha^{n-1}$ $(n\geqq 1)$ であるから

$$l_n=|z_{n+1}-z_n|=|1-\alpha^n-(1-\alpha^{n-1})|$$
$$=|\alpha^{n-1}-\alpha^n|=|\alpha|^{n-1}|1-\alpha|$$

ここで，$|1-\alpha|=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}$$

よって，$l_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\dfrac{5}{4}-\cos\theta}$

したがって，$L=\sqrt{\dfrac{5}{4}-\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}$

$$=\sqrt{5-4\cos\theta}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから，L は $\cos\theta=-1$，すなわち $\theta=\pi$ で最大値 3 をとる。

類題　＜２０１６　東京農工大＞

n を自然数とし，a，b，r は実数で，$b>0$，$r>0$ とする。複素数 $w=a+bi$ は，$w^2=-2\overline{w}$ を満たすとする。$\alpha_n=r^{n+1}w^{2-3n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$とする。ただし，$i$ は虚数単位とし，複素数 z に共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　a と b の値を求めよ。

(2)　複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α_1)，B($\overline{\alpha_1}$) について，∠AOB の大きさを θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする。
θ の値を求めよ。

(3)　α_n の実部を c_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする。
c_n を n と r を用いて表せ。

(4)　(3) で求めた c_n を第 n 項とする数列 $\{c_n\}$ について，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ が収束し，その和が $\dfrac{8}{3}$ となる r の値を求めよ。

4　おわりに

今回の研究を通して感じたことは，級数の収束または発散する条件を暗記しておくだけでは入試問題には対応できないということである。当然のことではあるが，根拠をしっかりと示した解答を作るための「答案作成力」が必要であり，こういった力を定着させるためには，長期的かつ継続的な日々の演習が必要不可欠である。さらに，級数問題が単独で出題される場合は極めて少なく，図形、関数、確率などといった様々な分野との融合問題として出題される場合が多い。そのため，他分野とのつながりも考えながら，計画的に問題演習に取り組んでいくことも大切である。今回の研究で得られたことを今後の指導に生かしていきたい。

【参考文献】

モノグラフ　数列〔３訂版〕　(科学新興新社)

2017 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕(聖文新社)

2016 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕(聖文新社)

2015 年度　全国大学数学入試問題詳解〔国公立大学〕(聖文新社)