数学Ⅲで扱う関数のグラフについて

愛媛県立今治西高等学校　　山　本　公　治

1　はじめに

２次関数，三角関数，指数関数等の関数のグラフは，基本の形を学んだ上で，平行移動等の変形をしてグラフを描く。３次関数は，微分して増減表こそ作成するものの，その概形は常識として扱うことが多い。それに対して，数学Ⅲで扱うグラフは多種多様にわたるため，概形を記憶しておく必要は基本的にはない。しかし大学入試においては，頻出の関数もあり，概形を知っておくことが有利であることも多い。そこで今年度は，数学Ⅲで扱う関数のグラフの内，知っておくと良いものについて調べ，コンピュータを利用して描くことで，視覚的に生徒の記憶に留めさせることを目標に，研究してみることにした。

2　研究の概要

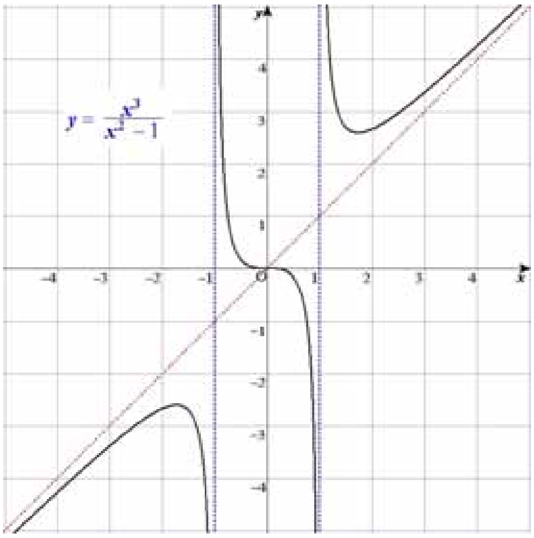
今年度，３年ぶりに数学Ⅲを担当することとなり，ゼロからのスタートに近い状況であるため，授業で使用する問題集といくつかの入試問題集の中から，よく出題される関数を取り上げ，GRAPES を用いて視覚化してみることにした。必要に応じてそれを生徒に還元することとした。

3　分数関数について

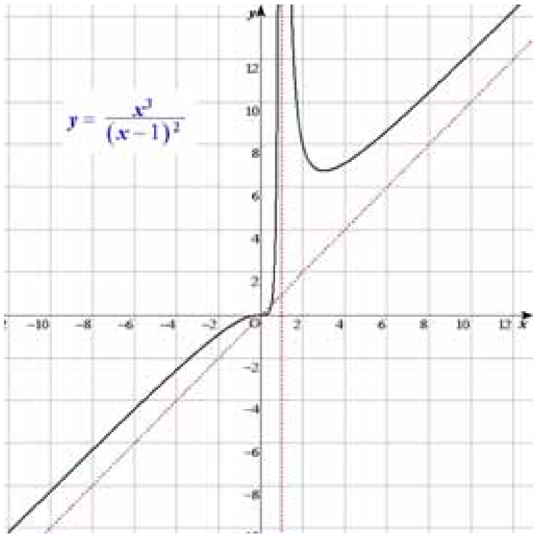
教科書でも扱われることの多い，漸近線を持つ分数関数であるが，漸近線前後や左右の極限を取ることに慣れるまでは，比較的描くのに苦労する関数である。ある程度慣れたところで，分母分子の次数を変えてグラフを描き比較してみた。

分数関数　$y = \frac{m\text{次式}}{n\text{次式}}$　において

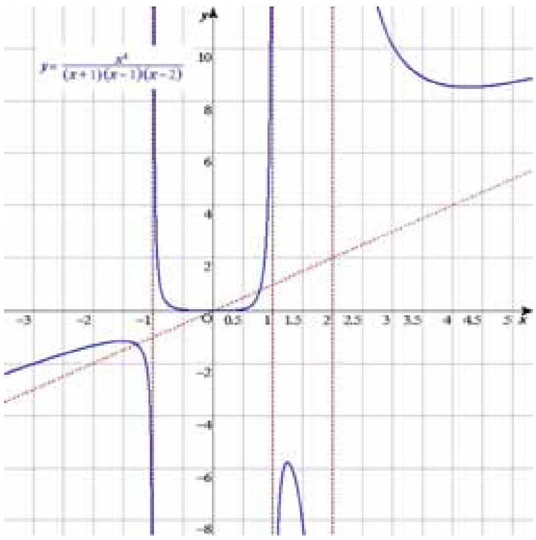
(1) $m = 3$，$n = 2$（分母が０になることあり）



(2)　$m = 3$，$n = 2$（分母が２乗になっているもの）



(3)　$m = 4$，$n = 3$（分母が０になることあり）



分母と分子の次数の違い，分母を０にする値が存在するか（つまり，縦の漸近線が存在するか）等に注意して，様々な組み合わせで描画してみた。縦の漸近線については，教科書に登場する $y = \frac{1}{x}$ や $y = \frac{1}{x^2}$ のグラフを利用した極限計算による漸近線と対比させながらイメージすることができる。軸に平行でない漸近線の理解もグラフからイメージすることができると思う。

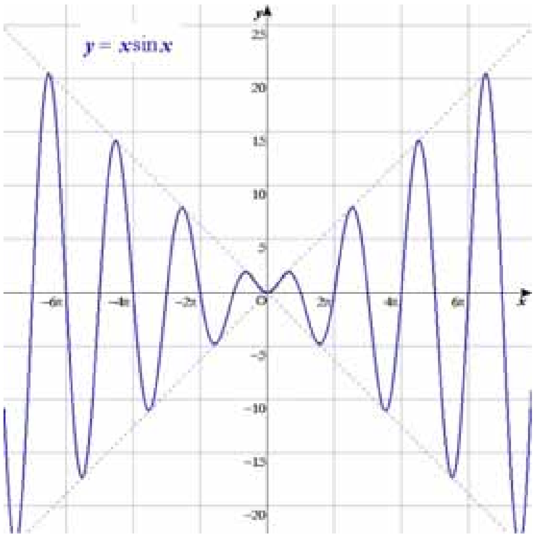
ただし，大学入試においては，「グラフを描け」のような問題として出題されることは少ないようだ。

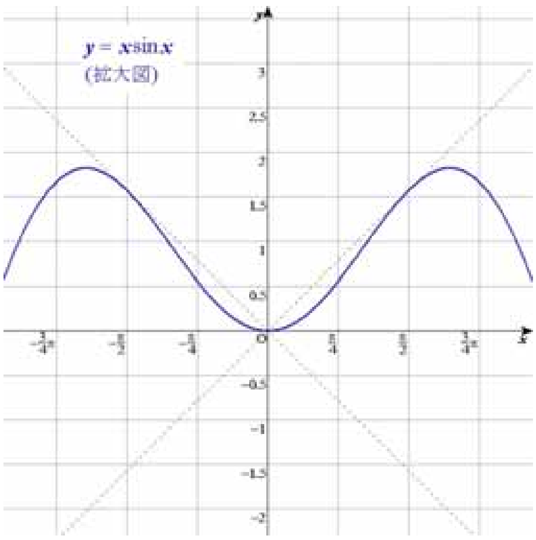
4　２つの関数を組み合わせた関数について

大学入試問題においては，整関数，指数関数，対数関数，三角関数等を組みわせた（和・差・積・商）関数の出題が多く見られるため，これらを組み合わせたものの内，印象に残しておくべきものについて描画してみた。

(1) $y=x\,sin\,x$　について

$y=\pm x$ に挟まれて振動するグラフで，比較的イメージしやすいグラフである。しかし，微分して増減や凹凸を調べることは結構やっかいで，グラフを描かせるよりもむしろ，接線や面積・体積と絡めた出題が見られた。右半分に限定すると，原点付近の様子が分かり辛く，多少不安になったので描画し拡大してみると，次図のようになっていた。$y=x$ と $y=sin\,x$ のグラフを利用した極限の公式と多少イメージの違いが感じられた。

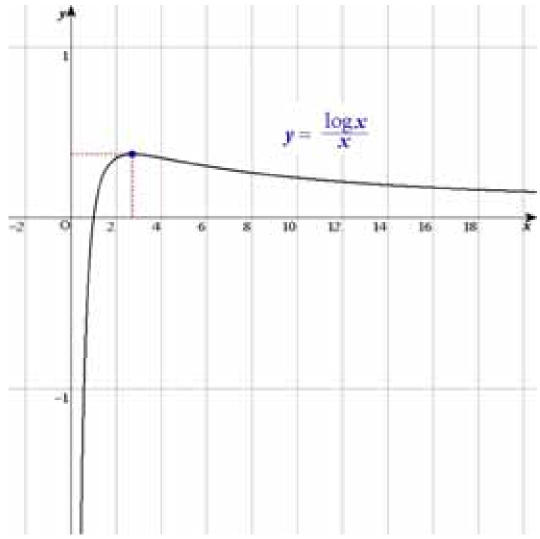




$y=\mathrm{e}^{-x}\,sin\,x$ や $y=x+sin\,x$ なども同じレベルで考察できる関数である。

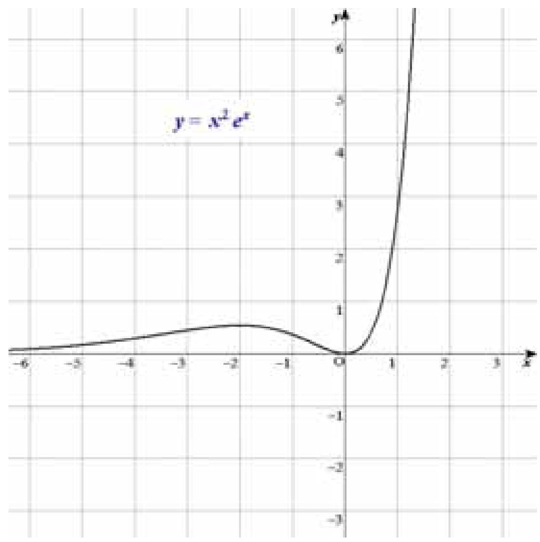
(2) $y=\frac{log\,x}{x}$　について

比較的出題の多い関数である。この関数は，微分して増減や凹凸を調べることから始めても難解ではなく，グラフもシンプルであるが，応用的な処理もあるため是非指導しておきたい関数であり，グラフも記憶させておきたい。



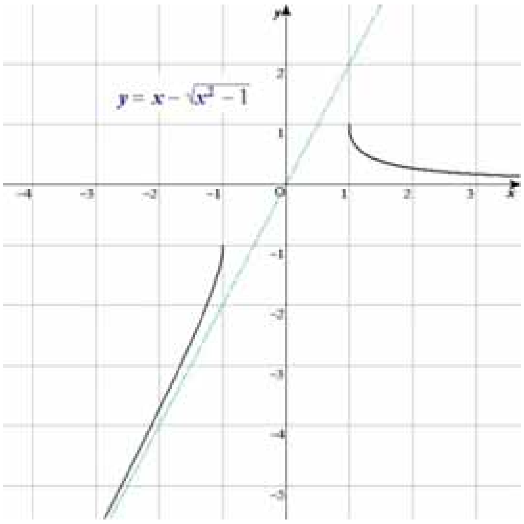
(3) $y=x^2e^x$　について

この関数も頻出である。２次式の部分が多少異なっていても微分して増減や凹凸を調べることは容易である。左端の極限計算などは，極限の分野でも重要であるから，セットにしてイメージさせるとよい。

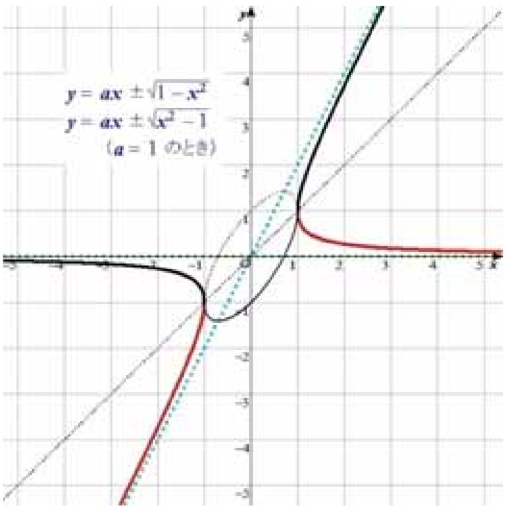


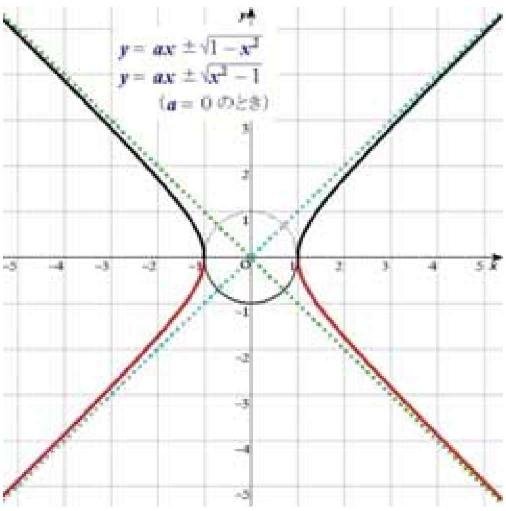
(4) $y=x-\sqrt{x^2-1}$　について

教科書傍用問題集に採用されていた問題であるが，数学Ｃの２次曲線を学習するまでは，思いつきにくい関数である。漸近線の存在やその処理にも学習する価値があり，さらに組み合わせることで，より深い理解ができる興味深いグラフを描画することができた。



平方するなどの処理をすることで，２次曲線の一部であることがわかるが，根号内の符号等に注意して定義域などに注目すると，組み合わせたグラフが以下のようになる。また，GRAPES の機能を利用してパラメータの設定をしておくと，回転することで円と双曲線を組み合わせたものの変形であることがわかる。漸近線の存在もよくわかり，興味深い結果となった。





５　研究のまとめ

研究の目標は，数学Ⅲで扱う代表的なグラフについてまとめる予定であったが，日が経つにつれて頻出の関数が目立つようになり，結果としてそれらに集中する結果となった。しかし，頻出の関数には，それなりの学習ポイントが多数含まれており，今回取り上げたものを学習するだけでも，多くの基本事項を学べると感じた。

今回参考にした問題の内，2003 年の筑波大学の問題，2003 年の大阪市立大学，2004 年の神戸大学の問題など，良問として取り上げられる関数のグラフは，数学Ⅲの入試問題を学習するにあたって是非解いておきたい問題であった。

コンピュータ研究委員会の研究としては，内容の薄いものになったが，微分して増減や凹凸を調べると共にひとまずグラフを描画してみることも有効なことではないかと感じた。