

# 分かる数学 - コンピュータを用いて -

愛媛県立津島高等学校 清家 規晶

## 1 はじめに

本校で数学を指導するにあたり、「分かる」ということは大変難しいことである。旧宇和島市の周辺校として位置する本校は、旧宇和島市の高校に比べ学力の低い生徒が多く、中にはきわめて学力の低い生徒も入学している。また、本校の教育課程の問題から、科目数が多く、各科目の単位数が少ないため、授業の最初に前時の復習を丁寧に行わなければならない。さらに、学習習慣が定着していない生徒が多いため、前時の内容を忘れていた者が多い状況である。このような状況の中で、どのようにして授業に興味を持たせるか、そして、生徒たちの記憶の中に残すことができるかということが課題になってくる。そのため、GRAPES、FUNCTIONVIEW などを利用して、グラフを視覚的にとらえさせる工夫を授業に加える研究をしてみようと思い、昨年と同じではあるが、この主題を設定した。

今回の内容は、昨年に引き続き軌跡の指導の改良と、領域を利用してキャラクターの絵を描くというものである。どちらも以前に実施したものはあるが、今年の高教研の発表の機会にもう一度、深く研究してみようと思った内容である。

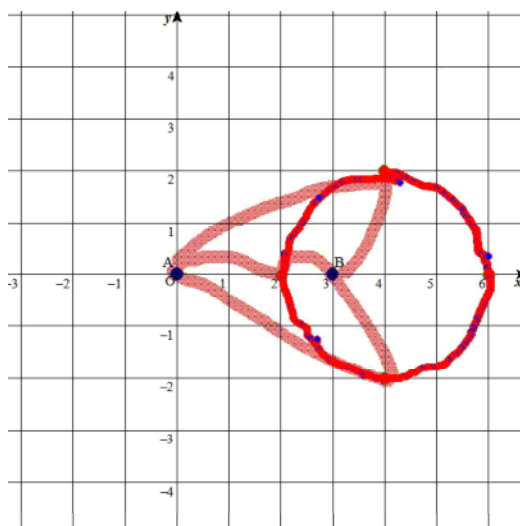
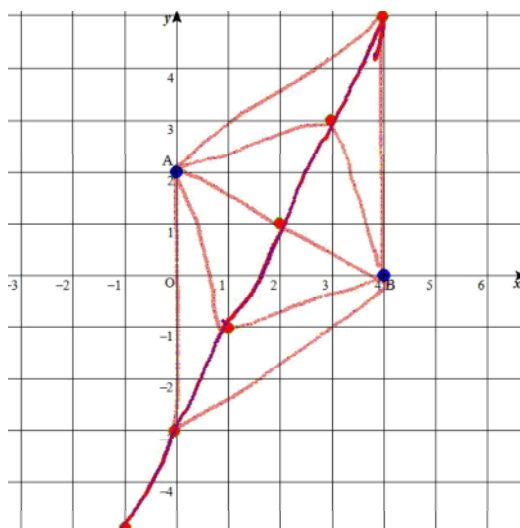
## 2 研究の内容

### (1) 軌跡

前年、研究授業を行う際にコンピュータを利用した授業を行った。指導内容は数学「図形と方程式」の中の第3節軌跡と領域で、軌跡の分野をグラフソフト GRAPES を用いて授業を行った。それに引き続きの内容である。

ここでの指導は、例年ならば条件を満たす式を作成し、その後式を整理して方程式を導くという方法をとるのであるが、GRAPES を使用することで、少し変化をつけてみた。2点から等距離にある点の軌跡と距離の比が2:1である点の軌跡を求めるところでは、まず座標軸上に2点を取り、GRAPES の機能の中にあるマーカーペンを利用して、その条件にある点を幾つかマークをさせた。さらにそこから、どのような図を描くかということを生徒に予測させた。それが、次の図である。

まず、図から読み取れることが何であるかということを考えさせ、さらに、最初の条件式を入力することで軌跡を確認させ、最後に式を整理することで式から読み取れる図形とグラフから導かれた図形が一致することを確認するという方法をとってみた。

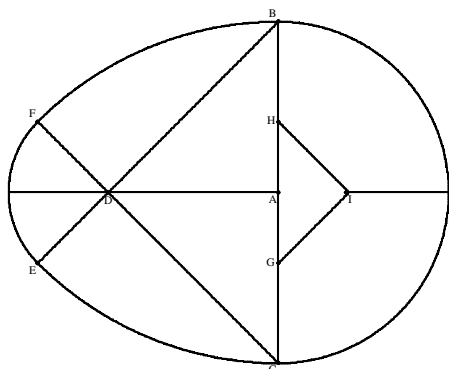


先にも書いたが、この指導方法は、式と計算から図を描くという、例年の方法とは逆のグラフから式を考えていくというものである。授業の進捗やテストの点を気にしなければならない状況ではできないかもしれないが、本校のように、そのようなことを気にする必要のない場合ではおもしろい方法であったと思う。

また、この時間の導入において、コンピュータを利用してはいないが、卵のパズルというゲームを取り入れている。その内容は「卵から生まれてくるものは？」という質問から始まるものである。この時は「ヘビ」、「カエル」、「ひよこ」など幾つかの答えの後、スムーズに求める答え「にわとり」がすぐに出てくれたのであるが、ここから導くことができる鳥は数種類あるのだから、「にわとり」に限定せず、もう少しいろいろな答えを聞いた方が、生徒の想像力を広げ、興味関心を引き出すこ

とができたのではないかとと思う。

次の図は、その基になった卵のパズルの作図である。



卵の形を描こうとすると、簡単なようであるが、それを数式で表そうとすると意外と難しいものである。しかし、グラフソフトを使用してみると、座標軸の基で円と直線だけで簡単に描くことができた。

この卵（パズル）を描く手順は

- Aを中心とする円をかき、直径BCを引く。
- BCに垂直な直線を引き、直線と円の交点の一つをDとする。
- 直線BDとCDを引く。
- Bを中心として、Cから弧を描き、直線BDとの交点をEとする。
- Cを中心として、Bから弧を描き、直線CDとの交点をFとする。
- Dを中心にEからFに弧を描く。
- E, FからBCに垂線を下ろす。その交点をそれぞれG, Hとする。
- Aを中心にGからHまでDと反対側に半円を描き、直線ADとの交点をIとする。
- 線分GI, HIを引く。

である。

できるならば、この図形をコンピュータの画面上で動かし、鳥を作ることができればと思う。今後はそういった工夫もしてみたいと思う。

(2) 領域

ここでは、領域を利用して絵を描いてみた。補習授業の時間を利用し、コンピュータ教室での授業を行った。単に絵を描くだけであれば Excel でも簡単に描くことができる(図1)。しかし、高校数学であるからには、その図がどのような式によって描かれるかということを理解してもらいたかった。そこで、最初に方程式・不等式を与え、「これをグラフにしていって何が描けるか」とい

う問いかけをした。数学の補習受講者であるが、式からキャラクターが想像できる生徒はいなかった。

次の式が最初に与えたものとその結果(図2)である。

$$\begin{aligned}
 x^2 + (y - 1)^2 &= 144 \\
 x^2 + y^2 &= 9 \\
 (x - 7)^2 + y^2 &= 16 \\
 (x + 7)^2 + y^2 &= 16 \\
 (x - 4)^2 + (y - 6)^2 &= 9 / 4 \\
 (x + 4)^2 + (y - 6)^2 &= 9 / 4 \\
 y &= 1 / 18 x^2 - 6 \quad (-6 \leq x \leq 6) \\
 (x - 4)^2 + (y - 7)^2 &= 4 \quad (y \leq 15 / 2) \\
 (x + 4)^2 + (y - 7)^2 &= 4 \quad (y \leq 15 / 2) \\
 (x - 7)^2 + y^2 &= 16 \quad (x \geq 7) \\
 (x + 7)^2 + y^2 &= 16 \quad (x \leq -7)
 \end{aligned}$$

図1

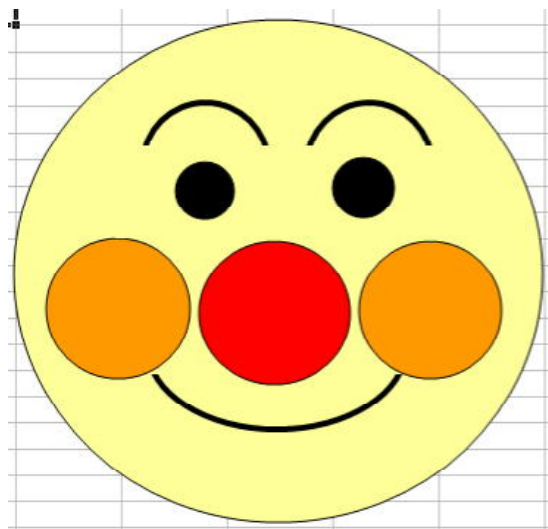
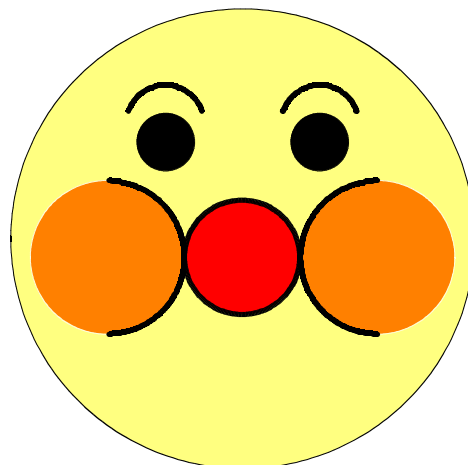


図2



最初の頃は式として与えたものはすべて方程式のみであったが、この式は定義域を加え、さらに色を指定したものである。領域に色付けをすることで、より生徒の興味を引くことができ、次の問題への意欲をかき立てることができた。さらに、一つが理解でき、領域や色付けの技術が身に付くとますます興味を持つようになった。

以下にその幾つかの例を載せておく。

例 1

$$y = -3 (-7 \leq x \leq 7)$$

$$y = x/3 - 1 (2 \leq x \leq 9)$$

$$y = -x/3 - 1 (-9 \leq x \leq -2)$$

$$y = x/9 - 3/2 (2 \leq x \leq 9)$$

$$y = -x/9 - 2 (2 \leq x \leq 9)$$

$$y = -x/9 - 3/2 (-9 \leq x \leq -2)$$

$$y = x/9 - 2 (-9 \leq x \leq -2)$$

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

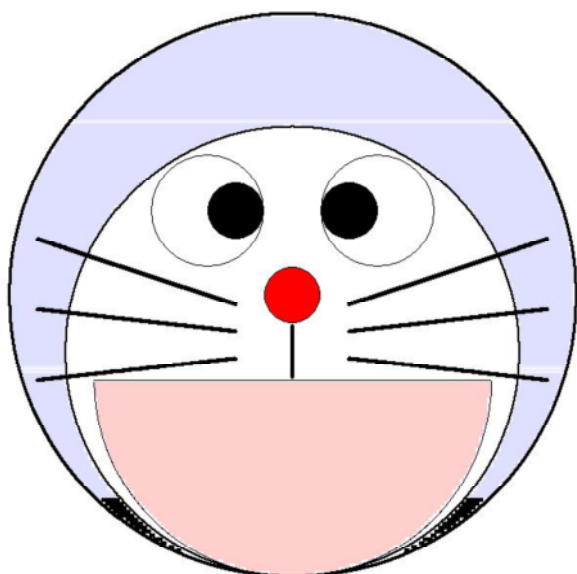
$$x^2 + (y + 2)^2 = 64$$

$$x^2 + y^2 = 100 \text{ and } x^2 + (y + 2)^2 = 64$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 49 (y \leq -3)$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 49 \text{ and } y \leq -3$$

$$x = 0 (-3 \leq x \leq -1)$$



例 2

$$x^2 + y^2 = 64$$

$$x^2 + (y + 4)^2 = 16$$

$$x^2 + (y + 4)^2 = 1 \text{ (黒)}$$

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ (黒)}$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ (黒)}$$

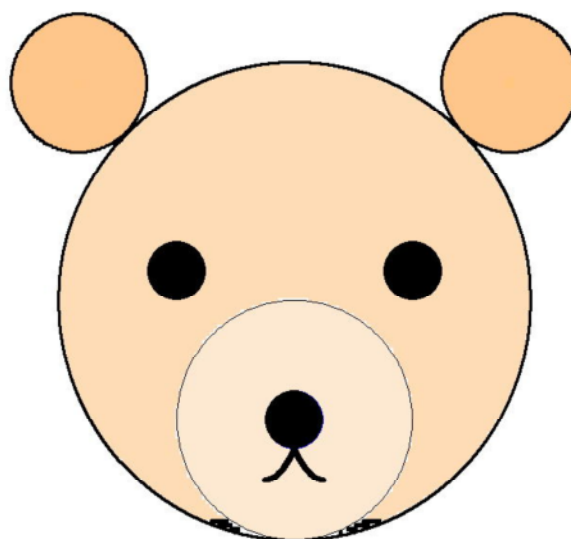
$$(x + 7.3)^2 + (y - 7.3)^2 = 7.3^2 - 8$$

$$(x + 7.3)^2 + (y - 7.3)^2 = 7.3^2 - 8$$

$$y = (x + 1)^2 - 6 (-1 \leq x \leq 0)$$

$$y = (1 - x)^2 - 6 (0 \leq x \leq 1)$$

$$x^2 + y^2 = 64 \text{ and } x^2 + (y + 4)^2 = 16$$



例 3

$$x^2 + (y - 15)^2 = 25 \text{ (黒)}$$

$$(x - 12)^2 + (y - 9)^2 = 25 \text{ (黒)}$$

$$(x + 14)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ (黒)}$$

$$y = 1/12(x + 3)(x - 5)$$

$$(-13 \leq x \leq 5)$$

$$y = 1/4(x + 2)^2 - 9$$

$$(-5 \leq x \leq 3)$$

$$y = 1/10(x + 1)^2 - 11$$

$$(-9 \leq x \leq 4)$$

$$y = -1/9(x + 10)^2 + 2$$

$$(-13 \leq x \leq -5)$$

$$y = -1/3(x + 2)^2 + 7$$

$$(-3 \leq x \leq -1/2)$$

$$y = -1/3(x + 6)^2 + 7$$

$$(-8 \leq x \leq -6)$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$(y = 0 \text{ and } x = -9.8 \text{ or } x = 3)$$

$$(2x + 6)^2 + (5/4y - 4)^2 = 9$$

$$(2x + 13)^2 + (5/4y - 4)^2 = 9$$

$$(3x + 9)^2 + (5/3y - 4)^2 = 4 \text{ (黒)}$$

$$(3x + 20)^2 + (5/3y - 4)^2 = 4 \text{ (黒)}$$

$$x^2 + (y - 6)^2 = 16$$

$$(y = 9 \text{ or } x = 0)$$

$$(x - 4.5)^2 + (y + 2)^2 = 2.5 \quad (x = 2 \text{ and } y = -4)$$

$$y = 1/4(x + 2)^2 - 9 \quad (-5 \leq x \leq 2)$$

and

$$y = -1/4x^2 - 6.5 \quad (-3 \leq x \leq 1) \text{ (赤)}$$

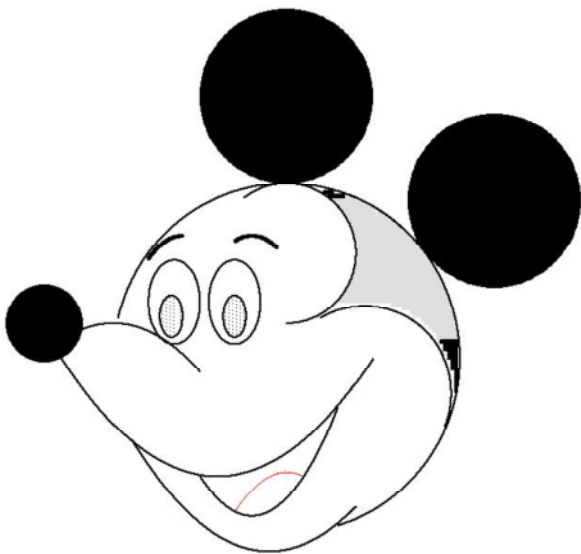
$$x^2 + y^2 = 100 \quad (x = 0 \text{ and } y = -5)$$

and

$$x^2 + (y - 6)^2 = 16 \quad (x = 0)$$

and

$$(x - 4.5)^2 + (y + 2)^2 = 2.7 \quad (x = 2 \text{ and } y = -4)$$



### 3 研究のまとめと考察

コンピュータを利用することで、生徒が興味を持つ。ということは、これまでも当たり前のことと考えられてきた。普通の黒板を使っての授業でなく、コンピュータ室に行って授業を行うというだけで生徒は興味を持つだろう。そして、「どんなことをしてくれるのか」という期待感を持つ。これだけでもコンピュータを利用する意義があると思われる。しかし、(1)の軌跡を求めるグラフ程度であれば準備はそう難しいことはないが、(2)の絵の準備は結構時間がかかる。ここでは、まず、絵が描きやすい Excel で円などの位置や大きさを確認し、色を付けながら絵を描く。その後、図形を式に直していき、図を描いていく。という方法をとった。以前にも作ったことがある絵であれば、一日くらいでできるが、新しく作成する場合は3・4日はかかった気がする。授業の中での使用時間としては、準備期間がややかかりすぎる気がする。時間に余裕があれば、いろんなキャラクターを最初から生徒に選ばせて、作成させても良いのかもしれない。

今回、幾つかのキャラクターを紹介したが、

GRAPES は陰関数の式が 10 までしか作成できない。しかし、円などでしかも色で塗りつぶす場合は基本図形の円を利用すれば簡単に作図できる。このように、GRAPES について、もっと知ることによって改善できる点はいくつかあるのかもしれない。また、GRAPES だけでなく Function View についても研究を加えていきたいと思う。

### 4 おわりに

コンピュータを利用して授業を行うことで生徒の理解を助けることになる。これはだれもが分かっていることであるが、幾つかの問題点がある。一つ目は、先にも述べたように、準備に時間がかかること。二つ目は、コンピュータ教室の空きがないこと。現在すべての学校にコンピュータが整備されているが、情報の授業との兼ね合いや商業の授業との兼ね合いでコンピュータ教室を使用できる頻度が少ないことである。三つ目はコンピュータを利用する余裕がないことである。本校のように授業の進度をあまり気にしなくても良い状況であれば、コンピュータを利用し、さらに生徒に使用させながら理解できるまでゆったりと授業を行うことができる。しかし、各学校の状況にもよるが、「次の模試はここまで必要」、「このくらすの平均点は」といったことを気にするとゆったりとした授業はできなくなってしまふ。この三つ目の問題が数学の授業からコンピュータを遠ざけてしまう一番の理由になっていると思う。

最後に、GRAPES の作成者である友田勝久先生の言葉から『グラフを描くために労力を費やすという、計算から始める数学ではなく、グラフから何を読み取るかという、グラフから始める数学があっても良いのではないのでしょうか』

今後は、多少時間はかかっても、授業の進度を考えると遠回りになっても、少し余裕を持って、授業にコンピュータを取り入れていきたいと思う。

#### 《参考文献》

- 秋山仁先生の作る！解く！IQパズル大百科  
 1 平面図形のパズル (学研)  
 理大 科学フォーラム 2008, 10  
 (東京理科大学)