コンピュータを用いた指導法の研究
－Function View を用いて(3)－

愛媛県立松山工業高等学校
徳永　正樹

1　はじめに

視覚に訴えることは、どの分野においてもその理解を助けるものであると思う。特にそれが動くものであったり、立体的なものであるならなおさらであろう。数学の授業においても、分かりやすい説明や教材・教具は、常に求められているもので、視覚に訴えたり自分で操作し確かめることができるコンピュータは、その代表的なものであると思う。

数年前からは、私は扱いやすさからフリーソフトである Math’９８や FunctionView を使っての指導を試みている。空間図形を表現できることから最近では Function View を使うことが多い。一昨年は、２次関数、条件式がある最大・最小、ベクトル等を、昨年は、三角関数で三角方程式、三角不等式の理解に重点を置いた。特に sin θ,cos θ,tan θの値が単位円の図形の上でどこに現れているかを画面を用いて十分に説明した後、動径が動いたとき、sin θ,cos θ,tan θの値を表す線分がどのように変化するのかを画面見せて確認させた。今年は、微分・積分の分野で、特に接線の説明と、導関数の符号を用いて関数の増減を調べることについての説明に、コンピュータを利用しての指導を試みた。

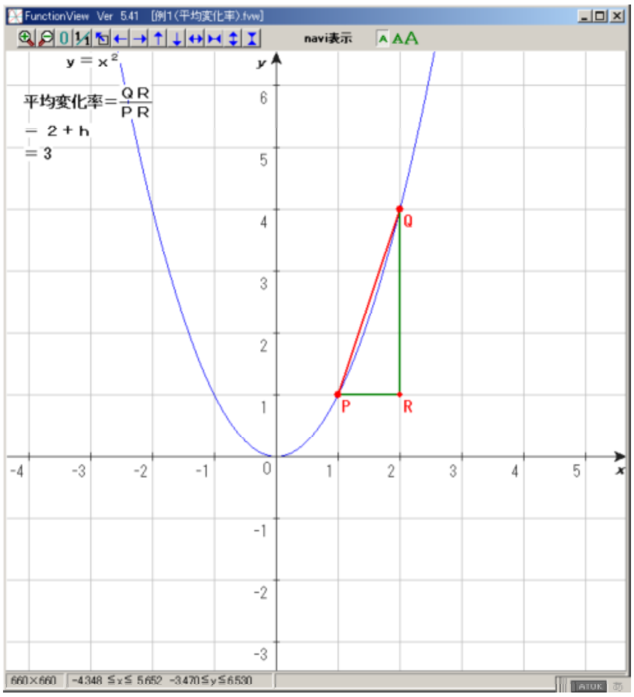
2　Function View の操作

Function View についてはご存知の方も多いので、操作方法等の説明については、興味のある方は他を参考にしていただきたいと思う。私自身も一昨年から使用しているが、説明書等を見ないでも大体のことは操作することができ、少し使ってみると大変使いやすいソフトであることが分かる。

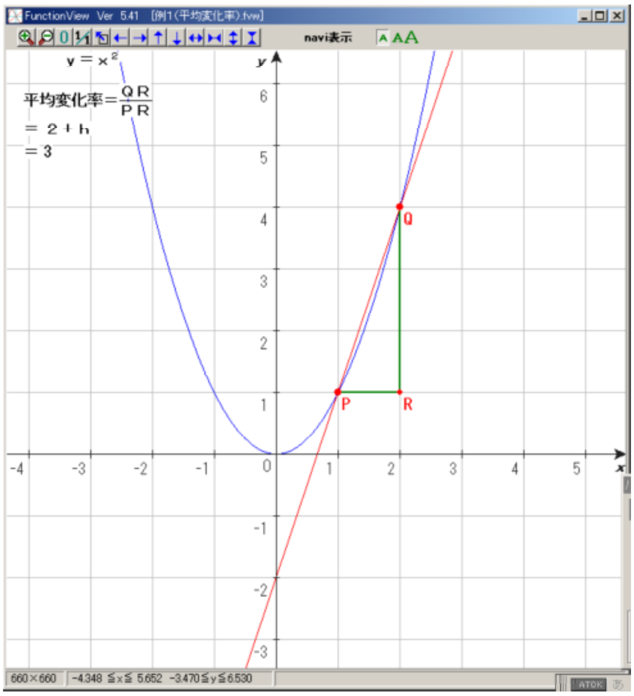
3　使用事例

(1)　平均変化率を表示

関数$y=x^2$を例にあげ、$x=1$から$x=1+h$まで変化するときの平均変化率の計算と図形的な意味を確認し、点$Q(1+h,(1+h)^2)$を点$P(1,1)$に限りなく近づけたときに直線PQが点Pにおける接線となることを理解させたいと思い、まず平均変化率を表す図形から表示させた。

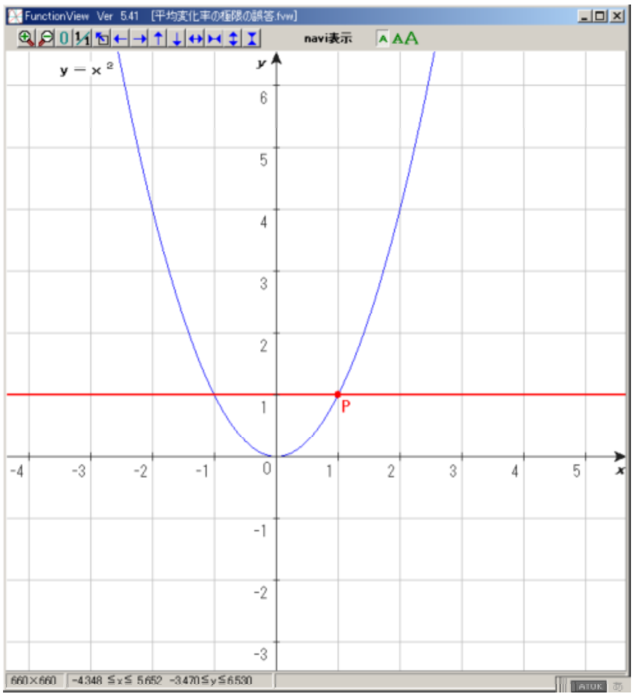


平均変化率が線分ＰＱの傾きであることを確認し、線分ＰＱを両側に延長する。

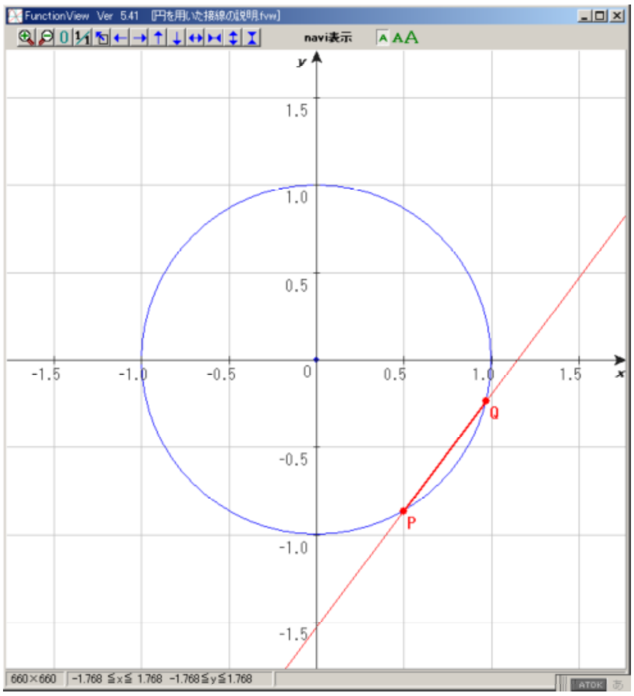


(2)　平均変化率の極限を表示（微分係数）

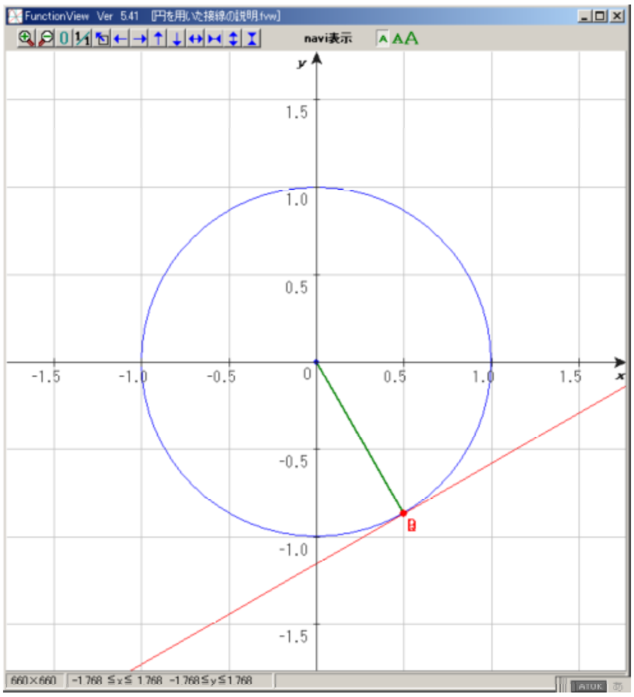
点Ｑを点Ｐに限りなく近づけるとき、直線ＰＱはどのような直線になるか、生徒に予想をさせると、思いの他次の図のような答が多い。



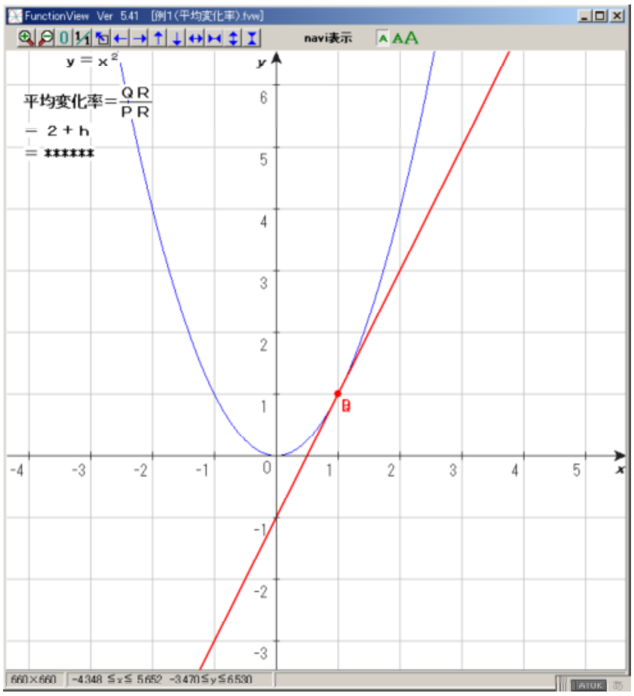
このとき、円を用いると生徒が理解しやすいことを先輩の先生から教えていただき、放物線の代わりに円を用い、円上で点Ｑを点Ｐに限りなく近づけさせて考えさせてみた。



この図形で考えさせると、直線ＰＱの点Ｑを点Ｐに限りなく近づけた極限が点Ｐにおける接線であることが容易に理解でき、後で線分ＯＰを引くことで、「接点」と「接線」についての復習もスムーズに行うことができた。



この後、先の放物線ｙ＝ｘ^2 で点Ｑを点Ｐに限りなく近づけたとき、直線ＰＱが点Ｐにおける接線となることを確認させると、ｙ＝１のような直線を考えることはなかった。さらに、点Ｑを点Ｐの右側から近づける場合と左側から近づける場合の両方を示し、どちら側から近づけても同一の直線になることを確認させた。



微分係数の定義式

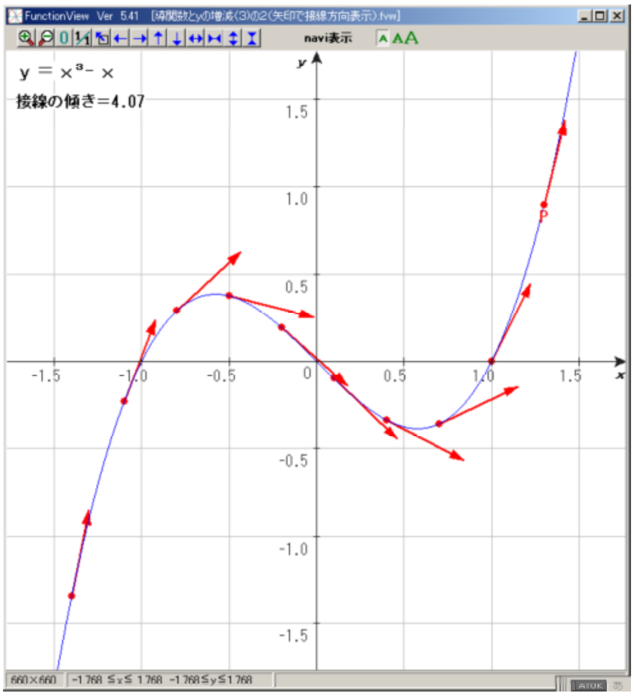
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

や、導関数の定義式

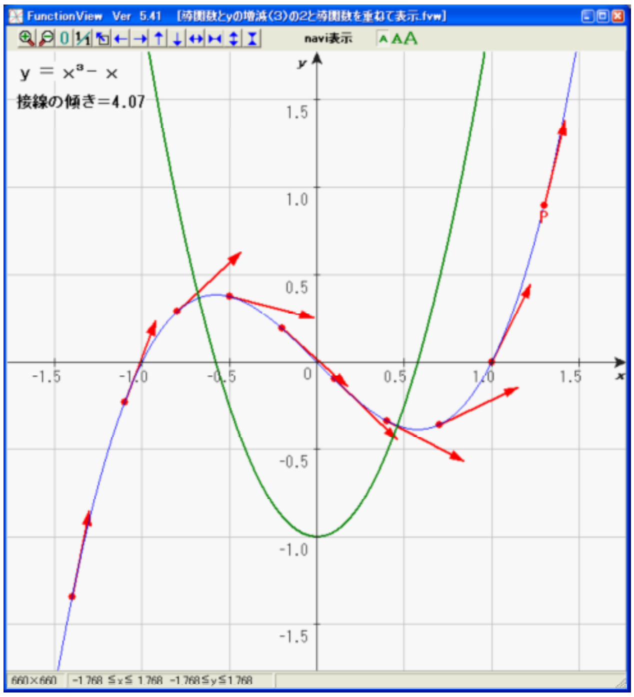
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

は見た目が難しく、数学を苦手とする生徒ほど、図形的な意味を考えずに公式として丸暗記しようとするように感じる。しかし、このように直線が動いていく様子を見せ、平均変化率と微分係数の図形的な面からの理解を深めることにより、多少なりとも上の定義式の理解を助けることができたのではないかと思う。

「積分する」という質問には割と答えやすいが、「微分する」という質問にはなかなか上手に答えることができない。一つの答として、曲線の各点にその曲線の接線の傾き（微分係数）を対応させること、という答があると思う。そこで、関数$y=x^3-x$を例にあげて、グラフ上のいくつかの点に接線方向の矢印（→）を用いて、接線の傾きを視覚的に表した。

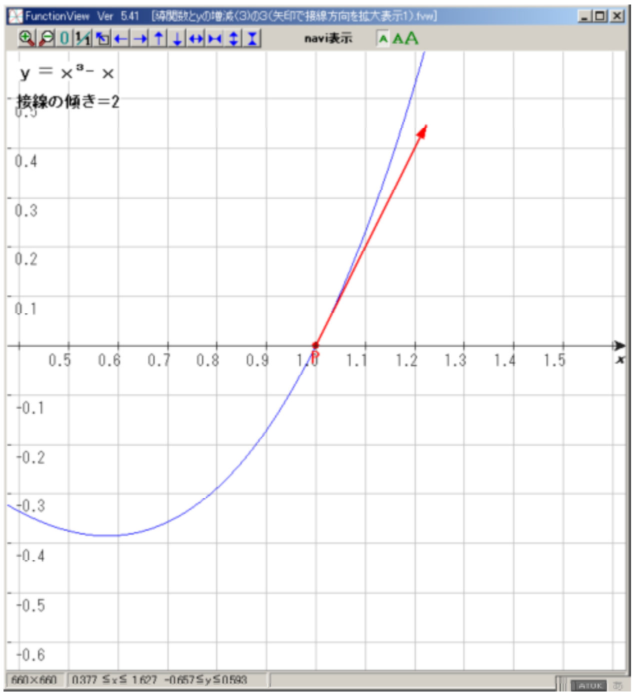


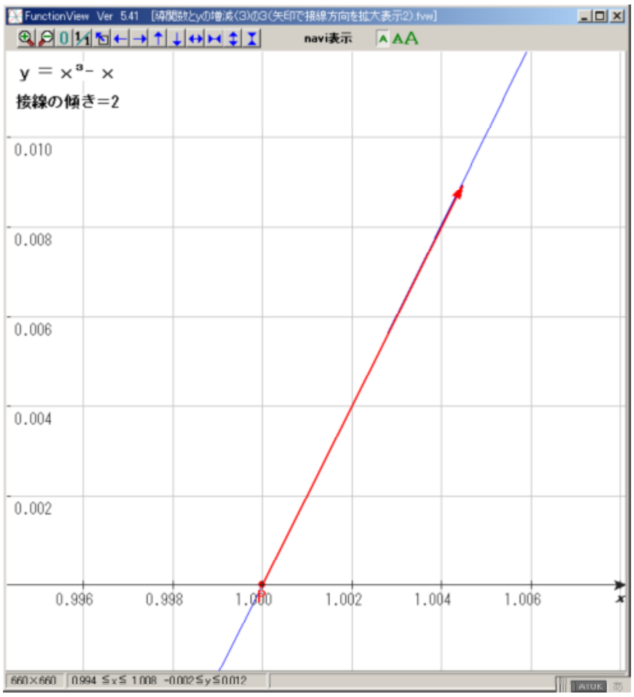
この図に導関数$y'=3x^2-1$のグラフを重ねてみると、導関数が接線の傾きを表していることがわかったようである



さらに矢印（→）を連続的に動かせ、傾きの変化を確認させた

また、微分の考え方で重要な点であるが、上のグラフを拡大すると、接線は局所的に曲線を直線で近似していることがわかる。



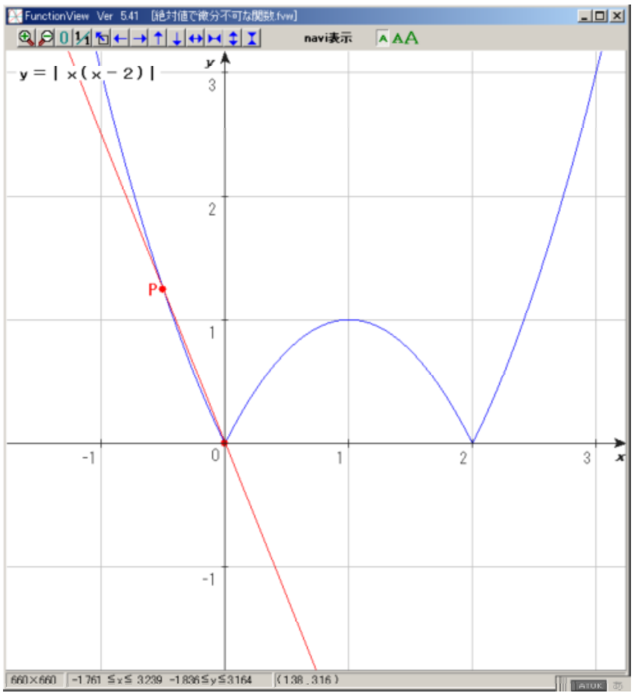


(3)　微分可能でない点

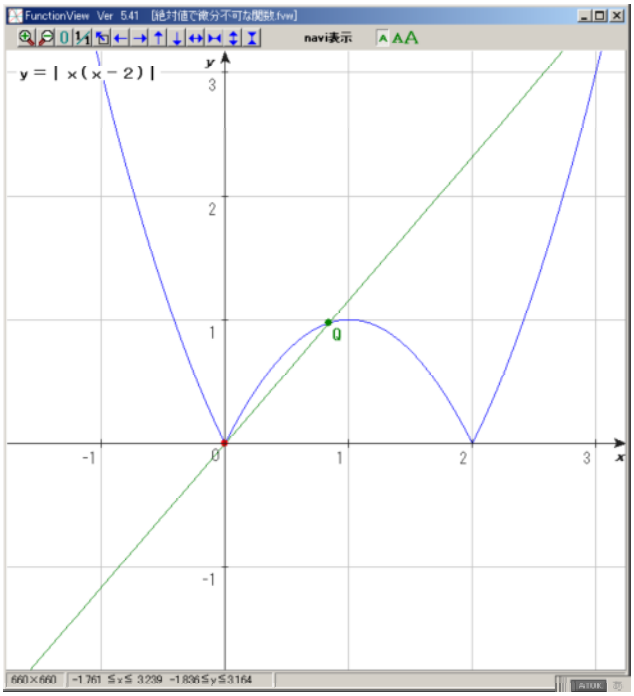
接線については、円や半径を用いて直感的に理解しているだけなので、接線についての理解を少し深めるために、またこれから数学Ⅲを学ぶ生徒のために、絶対値を含む関数$y=|x(x-2)|$を例に取り上げ、原点と点$(2,0)$における接線および微分係数について考えさせてみた。

原点における接線について生徒に予想させてみると、直線$y=-2x$、直線$y=2x$、あるいは直線$y=0$、わからないという答が返ってきた。そこで、画面上で点Ｐを左側から、点Ｑを右側から近づけさせた。

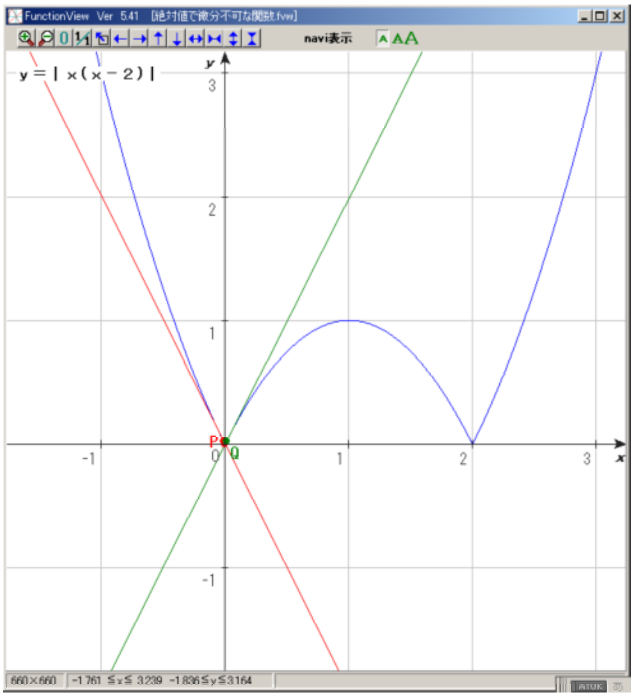
（ｉ）　原点Ｏに点Ｐを左側から近づけた場合の直線ＯＰ

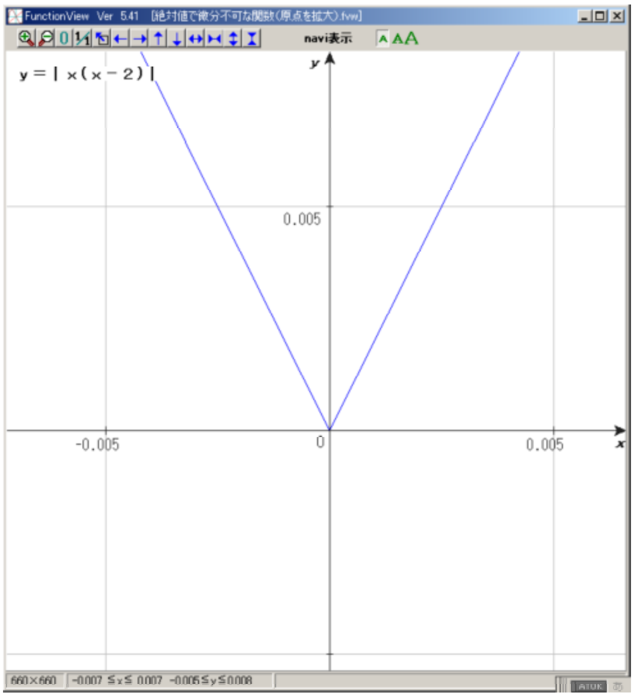


（ii）　原点Ｏに点Ｑを右側から近づけた場合の直線ＯＱ



左側、右側からそれぞれ近づけたときの直線がどのようになるかを確認させ、先の円や放物線のときと比べて異なる点は何かを考えさせた。





x＝2における接線についても同じようになることを画面上で確認させた。

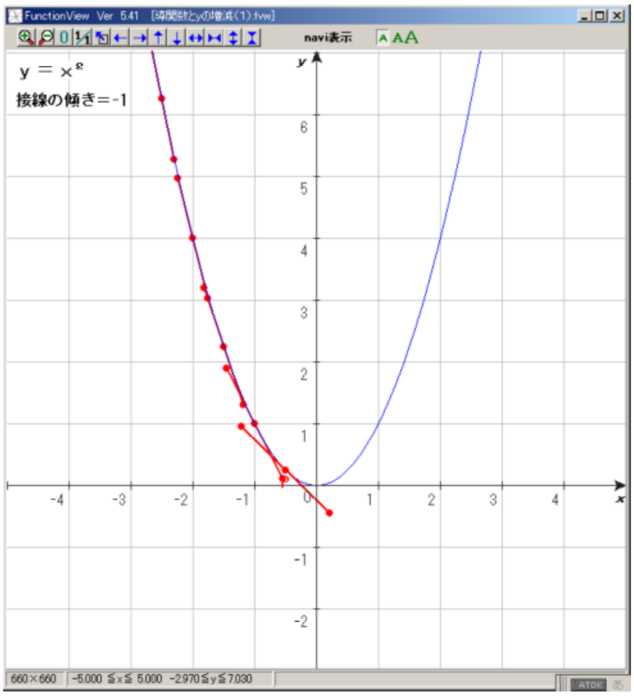
数学Ⅱの範囲ではないが、このような点では接線を１本に決めることができないことから、接線を引くことができないということ気がついたようである。また、接線の傾きと微分係数の関連から、微分係数が存在しないことも少し理解したように思う。

また、関数y＝｜x(x－2)｜の原点付近を十分に拡大してみると、先の関数$y=x^3-x$のグラフと異なり、局所的にも直線で近似できていないことが理解できていたと思う。

(4)　導関数の符号と関数の増減

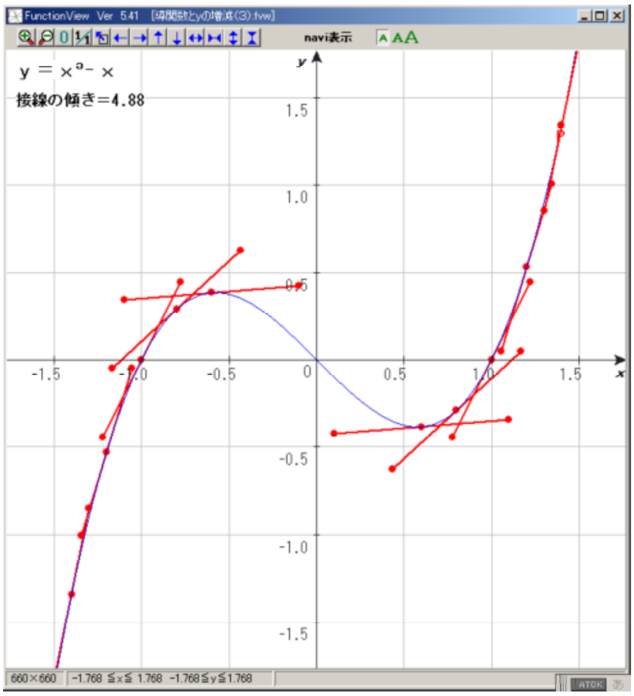
導関数の符号と関数の増加・減少の関係について、曲線に接する線分を移動させて確認をさせた。

（ⅰ）　$y=x^2$ で$y'<0$の部分

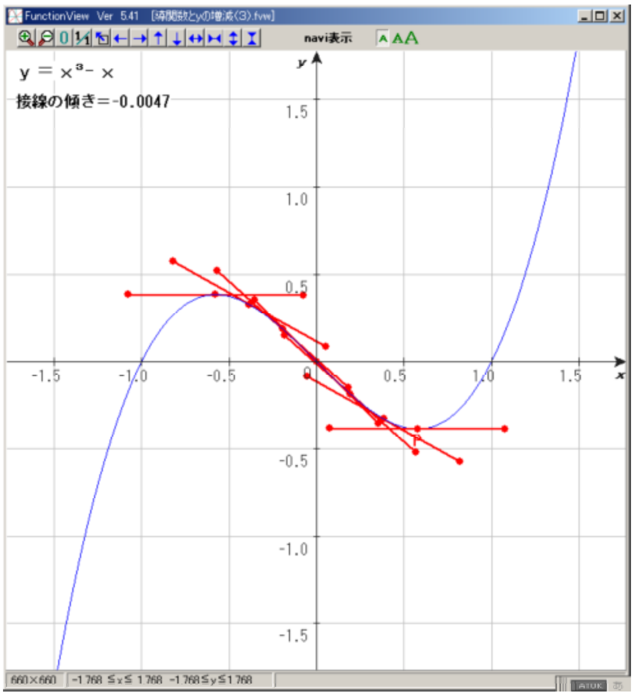


$y=x^2$ で$y'>0$の部分（画面は省略）

（ⅱ）　$y = x^3 - x$ で $y' > 0$ の部分

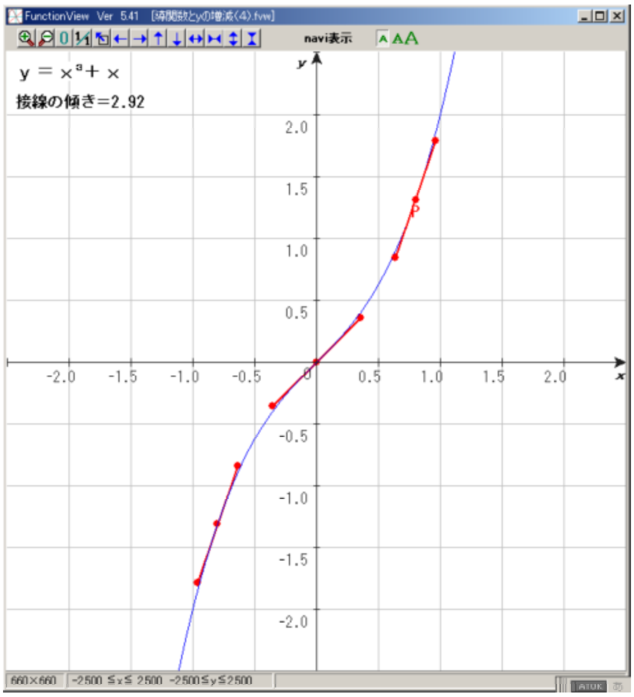


$y = x^3 - x$ で $y' < 0$ の部分



（ⅲ）　$y = x^3 + x$

　３次関数でありながら、導関数が常に正であるものの例として、$y = x^3 + x$ を取り上げ、接線の傾きと関数の増加を確認させた。



4　まとめと今後の課題

　数学Ⅱの範囲において、関数を微分するということ自体は、微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ を用いると関単に計算することができるが、微分の概念を教えることは大変難しいものだとと思う。２年生にとっては、「限りなく近づける」ということが大変難しく、その理解には感覚的な部分もあると思うので、画面を拡大させながら点が近づくときの様子を見せることで理解を助けることができたのではないかと思う。また、曲線と曲線上の接線を考えさせることで、微分についての理解を深めることができたのではないかと思う。

　なお、FunctionView で微積アニメを用いると、平均変化率、接線の変化、区分求積、定積分・基本定理のボタンがありそれぞれ関単に表示してくれる。特に区分求積では分割を増やしていく様子がよくわかるので、生徒も理解しやすいのではないかと思う。上手にこの機能も活用したいと思う。

　コンピュータを用いた授業には、大変興味を持って取り組み、こちらの説明にも熱心に耳を傾けていたと思う。ただ、今年は生徒自身がコンピュータを操作し、発見していくものではなく、こちらが見せて理解を深めさせるものであったので、生徒による発見的・発展的な部分は少なかったと思う。コンピュータは授業のどの部分でどのように使用するかが重要であり、効果的な使い方についても検討を重ねていきたいと思う。