「数値計算とコンピュータ」

センター試験分析と BASIC

愛媛県立松山西中等教育学校　髙田　修和

1　はじめに

毎年、大学入試研究委員会で、大学入試センター試験アンケート分析が掲載されている。それによると、「数値計算とコンピュータ」が数学Ⅱ・数学Ｂで選択されるのは全体の１％にも満たない。本年度、５年生が「情報Ｃ」の授業で､｢数値計算とコンピュータ｣を学習している。*Windows Vista* 上で快適に動く *BASIC* 言語として、「（仮称）十進ＢＡＳＩＣ」を活用している。フリーソフトであり、生徒が演習するには最適である。また、６年生に「数値計算とコンピュータ」で *BASIC* を教える機会があり、センター試験（平成２１年度）の内容について、より詳しく分析することで、生徒が選択する幅が広がればと考え、このテーマを設定した。

2　研究概要

（1）　平成２１年度センター試験

ア　「数値計算とコンピュータ」試験問題（配点２０）

「異なる２つの自然数 P，Q を用いて表される数」

p，q を異なる自然数とする。このとき，与えられた自然数 d について，d 以下の自然数 k のうちで

$k=mp+nq$（m，n は 0 以上の整数）・・・・・・（*）

のように表すことができるものを小さい順にすべて列挙し，最後にその個数を表示したい。そのために次のような〔プログラム〕を作った。ここで，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム〕

```
100  INPUT PROMPT  "p=":P
110  INPUT PROMPT  "q"=:Q
120  INPUT PROMPT  "d"=:D
130  LET U=0
140  FOR K=1 TO D
150     IF K-INT(K/P)*P＝0 THEN [ ア ]
160     FOR M=0 TO INT(K/P)
170        LET R＝K-M*P
180        IF [ イ ] THEN [ ア ]
190     NEXT M
200     [ ウ ]
210     PRINT K
220     [ エ ]
230  NEXT K
240  PRINT "総数="; U
250  END
```

（1）〔プログラム〕の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ。

⓪　GOTO 150　①　GOTO 170　②　GOTO 180
③　GOTO 200　④　GOTO 210　⑤　GOTO 230
⑥　PRINT R　⑦　PRINT U　⑧　PRINT M
⑨　LET R=R+1　ⓐ　LET U=U+1　ⓑ　LET K=K+1

また，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　R-INT(R/M)*M<>0　①　R-INT(R/M)*M=0
②　R-INT(R/P)*P<>0　③　R-INT(R/P)*P=0
④　R-INT(R/Q)*Q<>0　⑤　R-INT(R/Q)*Q=0

（2）〔プログラム〕を実行し，変数 P，Q，D にそれぞれ 3，7，15 を入力するとき，整数の列

3 $\boxed{\text{オ}}$ 7 9 $\boxed{\text{カキ}}$ 12 13 14 15

に続いて

総数＝9

が出力される。また，変数 P，Q，D にそれぞれ 3，７，100 を入力したとき，整数の列に続いて

総数＝$\boxed{\text{クケ}}$

が出力される。

〔プログラム〕を部分的に変更して，次のような２種類のプログラムを作る。

（3）式（*）のように表すことができないような d 以下の自然数 k を小さい順にすべて列挙し，最後にその個数を表示したい。そのためには，〔プログラム〕の 150 行および 180 行にある $\boxed{\text{ア}}$ を $\boxed{\text{コ}}$ に置き換えるとともに，200 行を削除すればよい。$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　GOTO 190　①　GOTO 200　②　GOTO 210
③　GOTO 220　④　GOTO 230　⑤　GOTO 240

（4）自然数 k に対して，式（*）を満たす組（m，n）の個数を v_k とする。d 以下の各自然数 k について v_k を出力し，最後に総数の和として和 $v_1+\cdots+v_d$ の値を表示したい。そのためには，〔プログラム〕の 150 行を

150　$\boxed{\text{サ}}$

のように変更し，180 行の $\boxed{\text{ア}}$ を $\boxed{\text{シ}}$ に置き換えて，200 行を削除する。さらに 210 行および 220 行を

```
210  PRINT  "k=" ;K; "のとき，" ;V; "個"
220  [ ス ]
```

に変更すればよい。$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。

⓪　GOTO 210	①　GOTO 220	②　GOTO 230
③　LET V=0	④　LET V=U	⑤　LET U=U+V
⑥　LET V=V+U	⑦　LET U=U+1	⑧　LET V=V+1

イ　解答

（１）（ア）150 行では 1≦K≦D である整数 K を P で割ったときの余りが 0 であるから，つまり K＝M×P を満たす整数 M があれば実行が移動する。このときは，条件を満たす場合であるから，その K の値を表示する 210 行へ実行が移動すればよい。よって、ア＝④

（k が p で割り切れる場合であるから，（*）の形より，k を表示すればよい。）

（a）K-INT(K/P)*P＝0 は整数 K を P で割ったときの余りが 0 であることを表す。

（イ）160～190 行の FOR～NEXT のループは K が P で割り切れないとき，0≦M≦INT(K/P)である整数 M について,R=K-M×P が Q で割り切れるかを判定する処理を行う。

180 行では R が Q で割り切れるとき，実行が移動する。よって、イ＝⑤

（$k-mp$ が q で割り切れる場合であるから,（*）の形より，k を表示すればよい。）

（ウ）200 行では条件を満たさないときに，次の K の値になればよいから，230 行へ実行が移動すればよい。よって，ウ＝⑤

（k は（*）の形で表せない数なので，210 行と 220 行をとばす。）

（エ）220 行では条件を満たす K の個数をここまで用いていない変数 U でカウントする。

よって，エ＝ⓐ

（（*）の形で表せる k の個数 U をカウントさせればよい。）

（２）（ア）P＝3，Q＝7，D＝15 のとき，

$1 \leqq k=3m+7n \leqq 15,\ m \geqq 0,\ n \geqq 0$

を満たす整数 m，n を調べればよい。

$m \geqq 0$ より，$7n \leqq 15$　$n \leqq \frac{15}{7}=2.1\cdots$

よって，n＝0，1，2 について考えればよい。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	／	3	6	9	12	15
1	7	10	13			
2	14	＼	＼	＼	＼	＼

表より

3　6　7　9　10　12　13　14　15

総数＝9

と出力される。

したがって，オ＝6，カキ=10

（イ）P＝3，Q＝7，D＝100 のとき，

$1 \leqq k=3m+7n \leqq 100,\ m \geqq 0,\ n \geqq 0$

を満たす整数 m，n を調べればよい。

$m \geqq 0$ より，$7n \leqq 100$　$n \leqq \frac{100}{7}=14.2\cdots$

よって，n＝0，1，2，･･･，14 について，考えればよい。

ところで，m は 0 以上の整数であるから，

n＝0 のとき，$3m+7n=3m$

n＝1 のとき，$3m+7=3(m+2)+1$

n＝2 のとき，$3m+14=3(m+4)+2$　となる。

$3m$ は 3 の倍数であり，

n＝3，4，5，･･･，14

は n＝0，1，2 の 3 つのパターンのいずれかに含まれる。

したがって，n＝0，1，2 を調べればよい。

（a）n＝0 のとき，$3m+7n=3m$ で，

$3m \leqq 100$　$m \leqq \frac{100}{3}=33.3\cdots$ より、

$1 \leqq m \leqq 33$　33―1＋1＝33 個

（b）n＝1 のとき，

$3m+7n=3m+7=3(m+2)+1$ で，

$3m+7 \leqq 100$　$m \leqq \frac{93}{3}=31$ より、

$0 \leqq m \leqq 31$　31－0＋1＝32 個

（c）n＝2 のとき，

$3m+7n=3m+14=3(m+4)+2$ で，

$3m+14 \leqq 100$　$m \leqq \frac{86}{3}=28.6\cdots$ より、

$0 \leqq m \leqq 28$　28－0＋1＝29 個

よって，表示される総数は，

33＋32＋29＝94 個

したがって，94＝クケ

（別解）$k=3m+7n\cdots$①の形で，6(m＝2，n＝0)，10(m＝1，n＝1)は表せる。

また，①で m を 1 増やすと k は 3 増え，①の形で「12，13，14」が表せることと合わせると，

↓　↓　↓

「15，16，17」が表せる。そうすると，①の形で 12 以上の整数はすべて表せる。

d＝15 のとき，①で表せる総数が 9 より，

d＝100 のとき，

総数＝9＋(100―15)＝94＝クケ

（３）式(*)を満たさない自然数を列挙するためには，150 行と 180 行で条件を満たすときは表示せずに，次の K の値になればよいから，230 行へ実行が移動すればよい。よって，コ＝④

（４）式(*)を満たす組(m，n)の個数 v_k をカウントする変数を V，和 $v_1+\cdots+v_d$ を表す変数 U を用意する。

（ア）150 行では v_k を表す変数を導入するために，V を初期化するから，サ＝③

（イ）180 行では(*)の形で表せる k の個数 v_k をカウントさせるから，シ＝⑧

（ウ）220 行ではv_k の和を U にするために，V の値をUに加えるから，ス＝⑤

ウ　補足

p，q を互いに素な自然数とするとき，

$k=mp+nq$（m，n は0以上の整数）

の形で，$(p-1)(q-1)$以上の整数がすべて表せる。

〔参考〕

a，b が互いに素なとき，$ab+1$以上のすべての自然数は，$ax+by$（x，y は自然数）の形に表すことができる。

（証明）　$n\geqq ab+1$を満たす自然数 n に対して，

$n-a$，$n-2a$，$n-3a$，･･･，$n-ba$

を b で割った余りはすべて異なる（証明１）ので，上の b 個の自然数の中に，b で割り切れるものがある（証明２）。それを $n-xa$ とすると，これは yb（y は自然数）の形で表され，$n-xa=yb$

よって，$ax+by=n$　（証明終）

（証明１）　t を b で割った余りをR(t)で表す。

$n-a$，$n-2a$，$n-3a$，･･･，$n-ba$ を b で割った余り R$(n-a)$，R$(n-2a)$，･･･，R$(n-ba)$はすべて異なる。

（証明）　もし同じものがあると仮定すると，異なる j，k に対して，

R$(n-ja)$＝R$(n-ka)$が成り立つ。

言い換えると，

$(n-ja)-(n-ka)=ka-ja=(k-j)a$ が

b で割り切れる。

a，b が互いに素であるから，a は b と共通な素因数を１つも持たない。

よって，$(k-j)a$ が b で割り切れるには，

$k-j$ が b の倍数でなければならない。

また，$1\leqq j\leqq b$，$1\leqq k\leqq b$ より，$-b\leqq -j\leqq -1$

$-(b-1)\leqq k-j\leqq b-1$

となり，これを満たす $k-j$ が b の倍数となるのは，1，2，･･･，$b-1$ は b の倍数ではないから，

$k-j=0$ のとき成り立つ。よって，$j=k$

これは，$j\neq k$ に反する。　（証明終）

（証明２）　整数を b で割った余りは，

0，1，･･･，$b-1$ の b 種類しか存在しない。

したがって、b で割ったときの b 個の余り

R$(n-a)$，R$(n-2a)$，･･･，R$(n-ba)$

がすべて異なるから，上の b 種類がすべて現れるしかなく，余りがワンセットそろう。

よって，R$(n-a)$，R$(n-2a)$，･･･，R$(n-ba)$の中に b で割り切れるものがある。　（証明終）

x，y を「負でない整数」に変えると，

〔参考〕の「$ab+1$以上」は，

$ab+1-a-b=(a-1)(b-1)$

と変形できる。

よって，

$(p-1)(q-1)$以上の整数はすべて，$ax+by$（x，y は負でない整数）の形で表すことができる。

（２）文法

① INPUT PROMPT ”(文字列)”：変数

INPUT による入力時に文字列を表示することができる。

② LET　変数＝数値

変数に数値を記憶させる。

③ FOR　変数＝初めの値　TO　最終の値

処理１

処理２

･･････

NEXT　変数

回数の決まったループ。

④ IF　条件式　THEN　命令

条件式が成立するときは，THEN に続く命令を実行せよ。

条件式が成立しないときは，THEN に続く命令を無視して次の行へ進め。

⑤ GOTO　行番号

GOTO の後に続く番号の行へプログラムを実行を移す命令文。

⑥ PRINT　数式

数式が演算の対象になり，その計算結果が表示される。

3　今後の課題及び所感

今回は１年分について詳しく考察をしたが、内容は数学的な要素も多分に含んでおり、単にプログラムを作れるだけでは厳しいように感じられた。プログラムについては流れ図を利用しながら、図式化することができれば、内容の把握もやりやすいように思う。できるだけ問題を解くことも必要であるが、それ以上にプログラムを作成することの楽しさを知って欲しい。また、今回はフリーソフトである「（仮称）十進ＢＡＳＩＣ」を紹介したが、より高度なプログラムが作成できるソフトについても、機会があれば授業で活用していきたい。