直線群から浮かび上がる図形について
―包絡線で曲線を定める―

愛媛県立今治東中等教育学校　　谷　山　伸　司

0　はじめに

高校生が物理の授業で学習するホイヘンスの原理などで見られるように，包絡線とは，連続的に動く一連の曲線全てに接する曲線のことである。ここでは，与えられた曲線の族の包絡線を次のように定義する：

> [定義(包絡線)]
>
> 全微分可能な実数値関数$h(x,y,X,Y)$, $f(X,Y)$に対し，$\{\langle x(X,Y), y(X,Y)\rangle \mid f(X,Y)=0\}$ が $\{G(h(x,y,X,Y)=0) \mid f(X,Y)=0\}$ の包絡線であるとは，$f(X,Y)=0$を充たす任意の点(X,Y)に対し，
>
> $h_x \cdot dx + h_y \cdot dy = 0$
>
> を充たすときをいう。
>
> ここで，h_x，h_yは，関数hのx，yによる偏導関数を表し，$G(h(x,y,X,Y)=0)$ は，(X, Y)を固定したときの$h(x,y,X,Y)=0$ のグラフを表すものとする。

この定義は，点(X, Y)を固定して考えたとき，求める曲線のdxとdyの比が，$h(x,y,X,Y)=0$ の(x,y)におけるそれと一致することから正当化される。

本論の目的は，2-パラメーターを持つ直線の族で与えられる包絡線を求める公式を与えることである。また，それを利用し，カージオイドなどの種々の曲線を直線の族の包絡線で定義することを試みる。

1　2-パラメータの直線群がなす包絡線を求める公式とその系

直線の族$\{a(X,Y)x + b(X,Y)y = c(X,Y) \mid f(X,Y)=0\}$の包絡線を求めよう。

$a(X,Y)x + b(X,Y)y = c(X,Y)$より，次が成り立つ：

$$da \cdot x + a \cdot dx + db \cdot y + b \cdot dy = dc$$

ここで，定義より，$a \cdot dx + b \cdot dy = 0$であることから，

$$da \cdot x + db \cdot y = dc$$

となる。よって，次が成立する：

$$(a_X \cdot dX + b_Y \cdot dY)x + (a_X \cdot dX + b_Y \cdot dY)y = c_X \cdot dX + c_Y \cdot dY$$

また，$f(X,Y)=0$より，$f_X \cdot dX + f_Y \cdot dY = 0$であることから，

$$\begin{vmatrix} a_X & a_Y \\ f_X & f_Y \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_X & b_Y \\ f_X & f_Y \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} c_X & c_Y \\ f_X & f_Y \end{vmatrix}$$

が成立する。これに$ax + by = c$を考慮に入れることにより，

$$x = \frac{b\begin{vmatrix} c_X & c_Y \\ f_X & f_Y \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} b_X & b_Y \\ f_X & f_Y \end{vmatrix}}{b\begin{vmatrix} a_X & a_Y \\ f_X & f_Y \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} b_X & b_Y \\ f_X & f_Y \end{vmatrix}}$$

が得られる。これを行列式の形にまとめて，

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} b & b_X & b_Y \\ c & c_X & c_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}}$$

が得られた。同様にして，

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} c & c_X & c_Y \\ a & a_X & a_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}}$$

が得られる。

> [公式１] (直線の族が成す包絡線)
>
> 直線の族$\{a(X,Y)x + b(X,Y)y = c(X,Y) \mid f(X,Y)=0\}$
>
> による包絡線は次の式で与えられる：
>
> $$x = -\frac{\begin{vmatrix} b & b_X & b_Y \\ c & c_X & c_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}},\quad y = -\frac{\begin{vmatrix} c & c_X & c_Y \\ a & a_X & a_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & f_X & f_Y \end{vmatrix}}$$

次に，この系として，1-パラメーターの場合を考える：

$X = \phi(t)$, $Y = \phi(t)$ とすると，$\phi^{-1}(X) - \phi^{-1}(Y) = 0$が成り立つと見られるので，$a(\phi(t), \phi(t))x + b(\phi(t), \phi(t))y = c(\phi(t), \phi(t))$　$(t \in \mathrm{R})$　の包絡線のx座標は，上で得た公式より，次のようになる：

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} b & b_X & b_Y \\ c & c_X & c_Y \\ 0 & \dfrac{dt}{d\phi} & -\dfrac{dt}{d\phi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & \dfrac{dt}{d\phi} & -\dfrac{dt}{d\phi} \end{vmatrix}}$$

右辺の分母分子に$\dfrac{d\phi \cdot d\phi}{dt^2}$をかけることにより，次の式が得られた：

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} b & b_X & b_Y \\ c & c_X & c_Y \\ 0 & Y' & -X' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & Y' & -X' \end{vmatrix}}$$

> [公式２] (直線の族が成す包絡線)
>
> 直線の族$\{a(X(t), Y(t))x + b(X(t), Y(t))y = c(X(t), Y(t)) \mid t \in \mathrm{R}\}$ による包絡線は次の式で与えられる：
>
> $$x = -\frac{\begin{vmatrix} b & b_X & b_Y \\ c & c_X & c_Y \\ 0 & Y' & -X' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & Y' & -X' \end{vmatrix}},\quad y = -\frac{\begin{vmatrix} c & c_X & c_Y \\ a & a_X & a_Y \\ 0 & Y' & -X' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a_X & a_Y \\ b & b_X & b_Y \\ 0 & Y' & -X' \end{vmatrix}}$$

続いて，直線の族が$\{\, a(t)x+b(t)y=c(t)\ |\ t\in \mathrm{R}\}$ で与えられるときを考える：

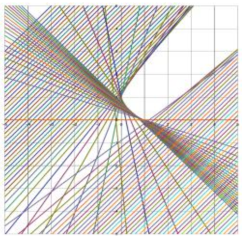
これは，公式１において，$X=t$，$f(X,Y)=X+Y$ と考えることによって次のようにできる。ここで，$f_Y=1$，$b_Y=c_Y=0$ が成り立つことを考慮に入れることにより，次の公式が得られた：

> [公式３] (直線の族が成す包絡線)
>
> 直線の族$\{\, a(t)x+b(t)y=c(t)\ |\ t\in \mathrm{R}\}$ による包絡線は次の式で与えられる：
>
> $$x=-\frac{\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}},\quad y=-\frac{\begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}}$$

［例１］

直線の族が$\left\{\dfrac{x}{X}+\dfrac{y}{Y}=1\ \middle|\ X^n+Y^n=1\right\}$ で与えられたとき，その包絡線は，公式１を用いて次のように計算できる：

自然数 n が偶数のとき，包絡線は $x^{\frac{n}{n-1}}+y^{\frac{n}{n-1}}=1$ で与えられ，自然数 n が奇数のとき，包絡線は $x^{\frac{n}{n-1}}+y^{\frac{n}{n-1}}=1$ のグラフと $x^{\frac{n}{n-1}}-y^{\frac{n}{n-1}}=\pm 1$ のグラフの和集合となる。


($n=3$ のときの包絡線)

［例２］

直線の族$\{(\sin\theta+\cos\theta)x+(\sin\theta-\cos\theta)y=\sin\theta\cos\theta\ |\ \theta\in\mathrm{R}\}$

の包絡線は　$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=1$

で与えられる。

［例３］

直線の族$\{(1+\sin\theta)x+(1-\sin\theta)y=\cos\theta\ |\ \theta\in\mathrm{R}\}$ の包絡線は $4xy=1$ で与えられる。

２　包絡線によるカージオイドの定義

任意の定数　$\alpha\in\mathrm{R}$ に対し，単位円周上の２点$(\cos\theta,\sin\theta)$，$(\cos\alpha\theta,\sin\alpha\theta)$を結ぶ直線が与える包絡線を考える($\theta\in\mathrm{R}$)。

２点$(\cos\theta,\sin\theta)$, $(\cos\alpha\theta,\sin\alpha\theta)$を通る直線の方程式は，

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & x \\ \sin\theta & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & \cos\alpha\theta \\ y & \sin\alpha\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\alpha\theta \\ \sin\theta & \sin\alpha\theta \end{vmatrix}$$

で与えられる。これをもとに計算すると，

$$\begin{vmatrix} x & -\sin\frac{\alpha+1}{2}\theta \\ y & \cos\frac{\alpha+1}{2}\theta \end{vmatrix}=\cos\frac{\alpha-1}{2}\theta$$

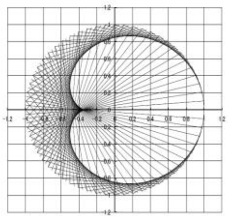
を得る。公式３に当てはめて計算することにより，次が得られた：

$$x=\frac{\cos\alpha\theta+\alpha\cos\theta}{\alpha+1},\quad y=\frac{\sin\alpha\theta+\alpha\sin\theta}{\alpha+1}$$

特に$\alpha=2$ のときは，

$x=\dfrac{\cos 2\theta+2\cos\theta}{3}$となり，

$x+\dfrac{1}{3}=\dfrac{\cos 2\theta+2\cos\theta}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\cos\theta(1+\cos\theta)$となる。また，$y=\dfrac{\sin 2\theta+2\sin\theta}{3}=\dfrac{2}{3}\sin\theta(1+\cos\theta)$となることから，得られた包絡線を x 軸方向に$\dfrac{1}{3}$だけ平行移動すると，極形式 $r=\dfrac{2}{3}(1+\cos\theta)$ で表されることが分かる。これは，件の包絡線がカージオイドであることを示している。



結　語

本論の応用として，曲率計算が考えられる。平面上の曲線の法線がなす包絡線が曲率円の中心の軌跡となることは，曲率円の定義から直感的に得られる。

コンピュータを用いた数学的な実験は生徒の数学に対する関心を高めるとともに，発見を促し，数学的な処理の力を高める縁となる。

次の例は，$\left\{\dfrac{x}{X}+\dfrac{y}{Y}=1\ \middle|\ Y=X^2-1\right\}$ の包絡線をコンピュータで描いたものである。包絡線は，簡単な定義でも興味深い図形を成すことが多く，生徒にできあがった曲線を想像させる楽しみを味わわせることができる。コンピュータによるシミュレーションは，数学の発想を豊かにさせ，発見につなげていく楽しみを感じることができる。自らの発想で，様々な事象を数理的に処理していくことを体験させることにより，生徒の数学に対する興味・関心及び探究心を高めることに努めたい。