正五角形の中に秘める黄金比の研究

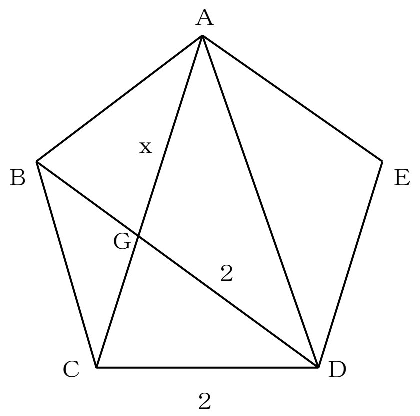
愛媛県立新居浜南高等学校　浅野泰典

1　はじめに

各学校において課題学習の取り扱いには苦慮されているところであろうが、本校においても特に系統立てた取り扱いはしていない。しかし、私自身昨年度の教研大会において発表させていただいた内容が課題学習に通じているものが多く、時間に余裕があるときなどはよく生徒に紹介している。例えば今年の日本時間９月８日にオリンピックの開催地が東京に決定したが、その開催地選びにはヘアー法という方法がとられている。多数決ではなくて、支持する者がより多い都市を選ぶ方法である。（参考：第５２回高教研数学部会研究発表要項Ｐ９）
そのような種々の選択方法を紹介することで、それぞれのメリットやデメリット等も考えることができる。

今回は、数学Ａの図形の性質の中で正五角形の作図に取り組んだが、そこで発展的内容として行った内容を紹介したい。

2　授業実践



上図のような１辺２ｃｍの正五角形ＡＢＣＤＥを作図した後、対角線ＡＣ、ＡＤ、ＢＤを結び、ＡＣとＢＤの交点をＧとする。ここで、△ＡＣＤと△ＤＣＧは相似で、
ＣＤ＝ＧＤ＝ＡＧ＝２である。

いま、ＡＣ＝ｘとすると、△ＡＣＤと△ＤＣＧにおいて、
ＡＣ：ＤＣ＝ＤＣ：ＧＣよりｘ：２＝２：（ｘ－２）
ｘ×（ｘ－２）＝２×２
$x^2-2x-4=0$
ｘ＞０より、$x=1+\sqrt{5}$
また、正五角形の１辺の長さは２だから
（正五角形の１辺の長さ）：（対角線ＡＣの長さ）は次のようになる。

$$2:(1+\sqrt{5})=1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ここで$\sqrt{5}$＝２．２３６として計算すると、約**１：１．６１８**になる。この比を**黄金比**という。

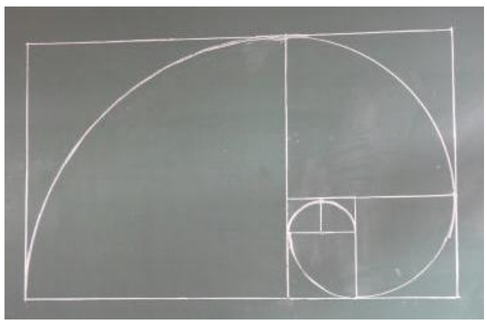
人の目を引きつけるものには共通点がある。その一つがこの黄金比である。我々の身の回りには黄金比がたくさん潜んでいる。モナリザやパルテノン神殿、ミロのヴィーナスやパリの凱旋門はあまりにも有名だが、デジタルカメラやトランプ、クレジットカードやタバコ、名刺や国旗など多くのものが黄金比になっている。

さて、有名な数列の一つに、木の枝分かれなどに見られる次のようなフィボナッチ数列がある。

１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，・・・・

この隣り合う２つの数の比も黄金比に近づくことがわかる。

ここで、この数字を一辺の長さとする正方形を組み合わせ、各正方形に４分の１円を描いてつなげると下図のようならせんが現れる。



このらせんを**フィボナッチスパイラル**という。
フィボナッチ数列という「数」かららせんという「形」が生まれる。

ちなみに「黄金角」というものがある。

円周360°を$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$に分ける計算式は

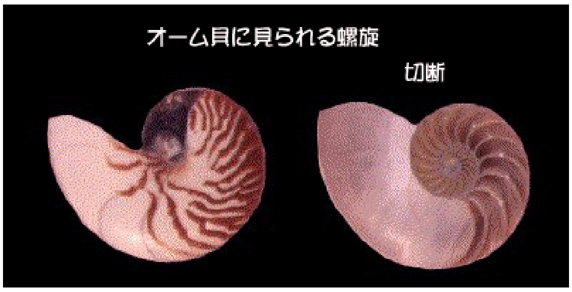
$$360°\times\frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$ となり、これを解くと

137．577・・・°となり、これを黄金角という。

この黄金角 137.5 度の配列のとき、ヒマワリにとって最も多くの種子が付く。わずかな差でしかない 137 度や 138 度でも配列はスカスカになり、限られたスペースにびっしりと無駄なく、バランスよく種子が配列されるのは 137.5 度となる。子孫を残すための必然的戦略と言える。
この性質は自然界の成長の仕組みに密接に結びついており、それが美しいという感覚を引き起こしているのだと想像できる。

ひまわりの種の付き方

松ぼっくりが描き出す模様



オーム貝の螺旋

自然界の生物における現象は、その環境や進化の過程により多種多様だから、すべてがこの規則や性質を持ってはいないだろうが、このように「黄金比～フィボナッチ数列～螺旋」という流れを自然界のあらゆるところに見られることが不思議であり面白さを感じるところである。

ここで、黄金比の数としての美しさを紹介する。

①
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

∵　黄金比は　$x^2 - x - 1 = 0$ の解より

$$x^2 = x + 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \cdots ア$$

$$x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} \quad (∵ア)$$

$$\cdots\cdot$$

②
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}}}$$

∵　黄金比は $x^2 - x - 1 = 0$　の解より

$$x^2 = 1 + x$$

$$x = \sqrt{1+x} \quad (∵\ x > 0)$$

$$= \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$$

$$\cdots$$

他にも白銀比と呼ばれるものなども生徒に紹介した。ドラえもんやキティちゃん、東京スカイツリーなどにも白銀比が秘められていることなど、我々の身の回りにはあらゆる数学的要素が含まれていることに生徒たちは興味を持っている様子だった。今後も私自身が研鑽を積んで生徒たちに還元していきたい。