

ランダムウォークの研究

愛媛県立上浮穴高等学校 渡部 靖司

1 はじめに

昨年度より、高等学校においても新学習指導要領が全面実施となった。数学と理科においては、新学習指導要領が先行実施され、今年度は全学年で実施となった。数学における新学習指導要領の目玉として、数学Ⅰ・数学Aにおいて、課題学習の実施がある。新学習指導要領によると「内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習活動を促し、数学のよさを認識できるようにする。」とあり、その内容の取扱いで「課題学習については、それぞれの内容と関連を踏まえ、学習効果を高める適切な時期や場面に実施するとともに、実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする。」と書かれている。昨年度、課題学習研究班で各校の取組を集計・分析する中で、課題学習の実践に苦慮されている学校が多くあることが分かった。

今回、友人である高知大学教育学部服部先生がランダムウォークの教材化の可能性を研究しており、私も課題学習の教材を探していたこともあって、このたび共同で研究することにした。本授業実践は、数学Ⅰ「データの分析」の発展教材の位置付けで、昨年度本校で実施されたものである。この実践は、授業実践研究として、日本数学教育学会第47回秋期研究大会において論文発表を行っている（服部・加納・渡部，2014）。本稿は、その概要をまとめたものであり、詳細については、服部・加納・渡部（2014）を参照して下さい。本稿が、皆様の今後の課題学習実践の一助になれば幸いです。

2 研究目標

「ランダムウォーク」は、酔歩などとも呼ばれ、株価の値動きの予測などの金融工学分野、数理ファイナンス分野、統計力学分野、量子力学分野など具体的モデル化に盛んに応用される確率モデルである。これを、数学Ⅰ「データと分析」の課題学習の教材として取り上げ、研究目標として新学習指導要領にある

- (1) 内容又はそれらを相互に関連付けた内容を発展させ、生徒の関心意欲を高める。
- (2) 生徒の主体的な学習活動を促し、数学のよさを認識できるようにする。

の目標を満たす教材であるか実践し、授業実践の妥当性を生徒の授業の様子及び授業後の生徒の感想から検証することにした。

3 研究内容（授業実践）

(1) 授業の実際

授業の対象、時期、授業者は以下の通りである。なお、授業を受けた生徒達は、数学Ⅰ・数学Aの内容を全て既習済みである。

対象：本校普通科1年生1クラス
(男子11名、女子15名、計26名)

日時：2014年3月6日

授業者：服部 裕一郎

T A：渡部 靖司

ア 予想

教師はまず「ランダムウォーク」についての説明を行い、数直線上の「ランダムウォーク」に関する問題を次のように提示し、ワークシート（図1）を配布した。

はじめ、点Pは原点にいます。サイコロを振って、偶数が出たら右(+方向)へ1、奇数が出たら左(-方向)へ1移動するとします。グラフ^{注1)}は縦軸が試行回数（移動回数）を表し、横軸が数直線を表します。試行回数を重ねるごとに、点を結び、折れ線グラフを完成させます。1人1枚グラフを完成させ、クラス全体でそのグラフをつなげていきます。1人50回サイコロを振ればクラス全体で約1350回の移動となります。さて、1350回の移動後、点Pは原点からどれくらい離れている^{注2)}でしょうか。

注記

注1) 問題プリントにおける点Pは本来、数直線上を左右に移動する。しかし、その移動の様子を視覚的に把握しやすくするため、横軸を移動距離、縦軸を回数にし、2軸グラフで図示をさせている。グラフの描き方についての補足説明は、問題プリント配布時に口頭で行った。

注2) 「原点からの距離」は「数直線上における原点からの距離」を表す。以下、「原点からの距離」の表記は「数直線上における原点からの距離」を表す。

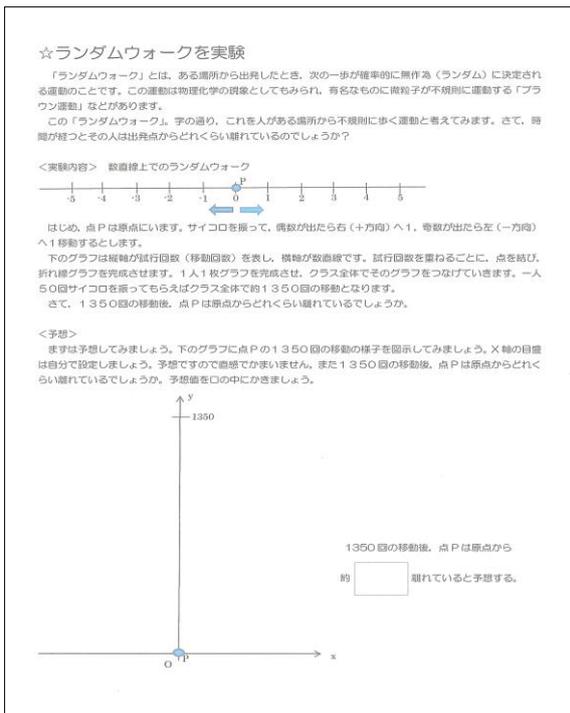


図1 ワークシート

教師は実験をする前に点Pの移動の様子を生徒達に予想をさせた。ワークシートに記述されたものによると、26名中19名が原点からの距離が5以下と予想し、図示していた。全生徒の予想は表1の通りである。教師は3名の生徒を指名し、黒板に板書（右方向に大きく移動し、その後、ジグザグに移動するもの：原点付近をジグザグに移動したもの：右方向に大きく移動し、その後、左方向に大きく移動するもの）させた。教師は原点から離れていくと考えた生徒に理由を聞いたところ「直感」と答えた。

原点からの距離	人数 (%)
0	3 (11.5%)
1	2 (7.7%)
2	4 (15.4%)
3	6 (23.1%)
4	4 (15.4%)
5	0 (0.0%)
9	1 (3.8%)
10	1 (3.8%)
20	2 (7.7%)
25	1 (3.8%)
26	1 (3.8%)
30	1 (3.8%)

表1 原点からの距離の予想

イ 実験

その後、サイコロを1人50回振ることによって、点Pの50回の移動をグラフにさせた（図2）。できた生徒から、グラフをつなげさせ、26名分のグラフを廊下で観察した（図3・4）。



図2 サイコロを振りグラフにする様子



図3 グラフをつなげていく様子



図4 クラス全員のつなげたグラフを観察する様子

その結果、1350回の移動後、点Pの原点からの距離は24であった。

ウ 実験結果を受けて

教師は生徒が自分で行った予想との比較を行わせ、その後、次のように発問した。

実験の結果、点Pは原点から24離れていることが分かりましたが、これをもって、「ランダムウォーク」の実験は結論付けてよいのでしょうか？

教師の発問に対し、生徒は隣同士で議論をし始めた。次は、その発問後の教師と生徒のやりとりの場面である。(T: 教師, S1~S3: 各生徒)

- T: ダメ?なんでダメなの?
 S1: 貼り付けた順番が違ったら・・・
 T: 貼り付けた順番。貼り付けた順番が違ったら結果は変わるのかな?
 S1: ...あつ、一緒や。
 T: そうやな。でもいいんよ!「貼り付けた順番が変わったら」って考えること自体が良いんだよ。どんどん言って。
 S2: たまたまみたいなの。
 T: たまたま。いいね!なるほど!
 S3: もう一回やったら違うんじゃないですか?
 T: もう一回やったら違うんじゃないかなと。

教師はこれらの発言を受け、手作業での実験から、今度は表計算ソフトを用いて、「ランダムウォーク」を実験してみることを提案した。表計算ソフトを用いれば、再計算を容易に行うことができる(図5)。手作業での実験は、この再計算1回分であったことを確認し、試行回数が100回後、500回後、1000回後、2000回後、4000回後の原点からの距離を求めるために、「各回の原点からの距離の絶対値の平均(30回の再計算)」をとらせた(図6)。



図5 コンピュータでシミュレーションをしている様子

※ F9ボタンを押すことで、各回後の原点からの距離の絶対値を記入しましょう。

再計算回数	100回後	500回後	1000回後	2000回後	4000回後
1	12	2	30	6	52
2	2	8	26	32	58
3	8	24	58	22	2
4	22	30	8	22	0
5	14	10	38	30	48
6	8	12	28	80	80
7	0	44	24	18	36
8	24	26	16	14	30
9	12	38	68	22	28
10	18	8	26	4	86
11	6	88	58	122	128
12	6	14	22	58	80
13	10	12	0	24	6
14	0	24	30	30	92
15	8	20	20	74	78
16	14	2	8	22	118
17	10	30	26	8	26
18	8	28	82	74	158
19	8	32	26	10	0
20	2	24	24	80	84
21	6	30	54	84	32
22	14	14	2	10	38
23	10	82	32	22	76
24	6	62	84	100	84
25	4	10	12	36	78
26	8	16	4	18	8
27	6	18	10	0	6
28	4	4	26	76	102
29	8	2	88	50	116
30	10	6	6	2	84
平均	8.9	21.3	28.2	35.8	56.9

平均値はエクセルに入力して算出してください。

図6 ある生徒が計算した各回の原点からの距離の絶対値の平均(30回の再計算)

その結果に対し、生徒達は次のような気づきをワークシートに記述している。

- ・数字にまとまりがない。
- ・回数が増えるごとに原点から遠ざかっていくことが多い。
- ・再計算回数が増えることにより、原点とのズレが大きくなる。なので、回数が増えていくことは原点に近づくことはなくなる。

教師は、試行回数が増えれば増えるほど原点から点Pは離れていくように思われることを確認し、 n 回試行した後の原点からの距離そのものの平均は、 n を用いてどのように表せそうか生徒に尋ねた。教師がいくつかのヒントを出すと、ある生徒が「 \sqrt{n} ではないのか」と発言し、授業は終了した。

エ コンピュータでシミュレーション結果を受けて後日、習熟度の高い講座に、「なぜ試行回数が増えれば原点から離れていくのか?」という発問をした。生徒の考えは以下の通りである。

- ・確率は1/2でも、表と裏が交互に出る可能性は低く、試行回数が増えるほど偏りも大きくなり原点から離れていくと思います。
- ・1回目は必ず左右どちらかに1離れる。
- ・2回目は原点と2離れるのが1/2ずつである。
- ・3回目と4回目は原点にいる場合1回目、2回目

と同じである。2 離れている場合 2 回で原点に戻るのは 1/4 である。

これらから、試行回数が増えるほど、原点から離れていくと考える。

生徒は、今までの知識を使って、しっかりと考え自分なり答えを出した。

(2) 授業の考察

本授業実践では、前半は手作業による「ランダムウォーク」の実験を行い、後半のコンピュータによるシミュレーションに入る前に、手作業による実験の結果のみで、本時の問題を結論付けてよいかどうかを生徒達に問うている。結果を鵜呑みにせず、複眼的に考察した S1, S2, S3 による発言は、統計的リテラシーの情意的要素の 1 つである批判的姿勢 (Gal, 2004) の一端ともいえるだろう。

次は、授業を受けての生徒の感想（自由記述）である（下線は筆者）。

S4: 僕は始め、サイコロの目が偶数になる確率と奇数になる確率は 1/2 と同じなので、原点から左に動いても同じ確率で右に戻ると思い、原点のまわりをフラフラすると予想しました。しかし結果はだいたい回数が増えるごとに原点から遠くなっていってしまいました。予想が大きくはずれたので、僕には「なぜだろう」という気持ちが残りました。予想を立てずに答えのみ教えてもらうと残らない思いなので、まず自分で考えることの大切さを教えてもらった気がしました。

S5: 自分たちで実験をすることで印象に残りました。実験をしていて、やっぱり数学というものは楽しいまたは面白いと改めて感じました。

S6: 実験の予想では原点からあまり遠くへは離れないと思っていたけれど、結果は原点から離れていて予想と全然違ったので驚きました。

S7: 数学はだいたい一つの答えを求めて解くものだと思います。だけど、今回の問題は国語などのようにたくさんの答えがありました。これは、いつもの数学にはない感じだったので不思議でした。ランダムウォークをして数学のイメージが少し変わりました。

S8: 「ランダムウォーク」というものは、私は初めて知りました。今回の授業をして私は考えることの大切さを知ることができました。これからはしっかりと考えながら理解を深めたいと思いました。

S4 の生徒のように、結果に対して「なぜ？」という気持ちが導き出した生徒や、別の生徒では、「(ランダムウォーク問題の) 明確な答えを出したい」、「考える力を養いたい」といった感想もみられた。本授業実践では、与えられた課題に対する探究心やじっくり考え

ようとする態度を育成することができたと考えられる。

S5 の生徒のように、授業に対して、「楽しかった」、「面白かった」、「興味深かった」等の単語を記述した生徒は 14 名/26 名 (54%) おり、さらに他 8 名についても、S6 の生徒のように、結果に対して「驚いた」等の単語を用いて授業の興味深さを感想として記述している。つまり、22 名/26 名 (85%) が、本授業に対し、「楽しさ」や「驚き」の感想を述べていることから「ランダムウォーク」を題材とした本授業実践は生徒達の興味関心を高める教材であったと考えられる。また、S4 や S8 の生徒の感想のように自分で「考える」意義を見出す意見も多数見られた。授業の最初に予想をさせたことで、それが学習の動機づけとなり、結果への驚きから生徒達の学習意欲は高まったと考えられる。

4 おわりに

本研究は、「ランダムウォーク」を数学 I 「データと分析」の課題学習において新学習指導要領の目標を満たすことができる教材であるか実践、検証することを目的とし、次の結論を得ることができた。

(1) 「ランダムウォーク」の挙動把握に関するワークシートでは、ほとんどの生徒 (80.7%) が「原点からの距離は大きくはならず、距離 5 以内にとどまる」と認識する傾向があった。しかし、実験を通して、その予想が裏切られたことの驚き、考えることの楽しさ、数学の楽しさを感じる生徒がほとんどであり、生徒の関心意欲が高められたと考えられる。

(2) 授業実践を行った結果、生徒達の感想から生徒達は「ランダムウォーク」に興味関心を持ち、その挙動を捉えようと主体的に活動した。ただ、数学のよさを認識することができたかどうかは感想文からは読み取ることができなかった。

最後にお忙しい中、本校で授業実践や助言を頂いた高知大学教育学部服部裕一郎先生、加納理成先生にこの場を借りて感謝いたします。ありがとうございました。

引用・参考文献

- Gal, I. (2004). Statistical Literacy. Meanings, Components, Responsibilities. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking, pp. 47-78, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- 服部裕一郎・加納理成・渡部靖司 (2014) 「高校数学における「ランダムウォーク」の教材化—不確実性の理解促進を目指して—」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究 臨時増刊 第 47 回秋期研究大会特集号』, 第 96 巻, pp. 137-144.