数学Ⅰ・Ａにおける課題学習の研究
―　集合の図示法における課題学習の研究　―

愛媛県立今治西高等学校　吉田英樹

１　はじめに

新学習指導要領の完全実施に伴い，数学Ⅰ・Ａにおける課題学習の指導方法の研究が進んでいる。教科書巻末の資料を参考に，各校の実態に合わせて指導内容や手順を研究されているように思う。数学Ⅰにおいて取り扱われることが多いテーマは，2 次関数，三角比，データの分析であり，数学Ａでは，確率，図形，整数問題について取り上げることが多い。そこで本研究では，比較的取り上げられることの少ない数学Ⅰの「集合」および，数学Ａの「集合の要素の個数」の分野における課題学習の事例を研究するものである。

２　研究の目標

学習のテーマを数と式の「集合」と，数学Ａの「集合の要素の数」とし，課題学習の指導事例を研究するものである。身の回りの事柄に即したものや，日常生活と関連付けた事例を題材にして「集合の図示法」について紹介し発展させる。

３　研究の内容

数学Ａの「集合の要素の個数」を学習した後の授業を利用して，身の回りの事例を用いた授業の展開を想定している。新学習指導要領では「数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる」ことが目標に明示されているので，この分野について具体的な事例を用いて理解を深めることは重要である。

集合の学習において，その集まりを図式化する方法として多くの教科書で用いられるのは「ベン図」である。集合の包含関係や，共通部分，和集合を視覚的に捉えることができる非常に有力な表現方法であるが，次のような問題を考える際，ベン図を用いて表現すると，問題を考察する上で苦慮する生徒がいるのではないだろうか。まず「ベン図」を用いて考えてみる。

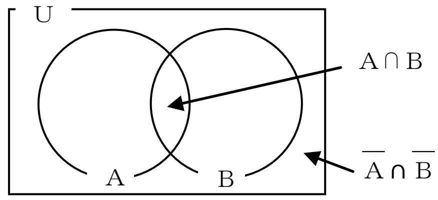
$\boxed{\text{問題１}}$

クラスの生徒 40 人の通学方法を調べました。バスを利用する生徒は 18 人，自転車を利用する生徒は 16 人，バスと自転車の両方を利用する生徒は 7 人います。

では，バスも自転車も利用せずに登校している生徒は何人いるのでしょう。

この問題を「ベン図」で表現すると以下のようになる。

Ａ：バスを利用する生徒
Ｂ：自転車を利用する生徒
Ａ∩Ｂ：バスも自転車も利用する生徒
$\overline{A} \cap \overline{B}$：バスも自転車も利用しない生徒



バスも自転車も利用しない生徒の人数は教科書では，

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(U) - n(A \cup B)$$
$$= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$$
$$= 40 - (18 + 16 - 7)$$
$$= 13$$

と計算し，13 人という解となる。この考察の中には，補集合や，和集合の考え方が理解できなければならず，理解することが難しい生徒もいる。

一方，この問題を「カルノー図」を用いて表した場合，以下のようになる。

Ａ：バスを利用する生徒
$\overline{A}$：バスを利用しない生徒
Ｂ：自転車を利用する生徒
$\overline{B}$：自転車を利用しない生徒
Ａ∩Ｂ：バスも自転車も利用する生徒
$A \cap \overline{B}$：バスを利用して，自転車を利用しない生徒
$\overline{A} \cap B$：バスを利用しなくて，自転車を利用する生徒
$\overline{A} \cap \overline{B}$：バスも自転車も利用しない生徒

U	B	$\overline{B}$
A	A∩B	$A \cap \overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

この図での表し方の場合，以下のような計算で解を求めることになる。

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(U) - \{n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}) + n(\overline{A} \cap B)\}$$
$$= 40 - \{7 + (18 - 7) + (16 - 7)\}$$
$$= 13$$

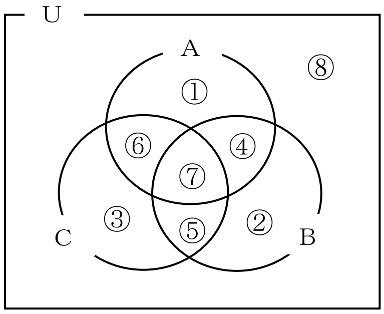
二つの表現方法を比較すると，集合と補集合の関係が同位である場合には，カルノー図で表すと問題を捉えやすい。ド・モルガンの法則も，上記のカルノー図を用いれば集合と補集合が同位にあることで容易に理解できる。

このように 2 つの集合の関係を理解するのに便利なカルノー図であるが，集合が 3 つ存在するようなケースは，どのように考えればよいかを考察する。

問題２

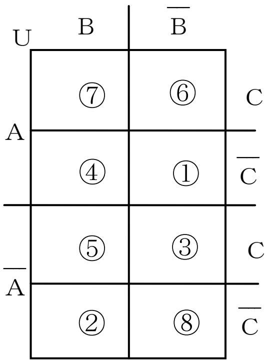
100 人の生徒のうち，香川県に行ったことのある生徒（集合A）は 50 人，徳島県に行ったことのある生徒（集合B）は 20 人，高知県に行ったことのある生徒（集合C）は 25 人であった。AかつBに属する生徒はx人，AかつCに属する生徒は 10 人，BかつCに属する生徒は 8 人であった。AかつBかつCに属する生徒が 5 人，AにもBにもCにも属さない生徒は 25 人であった。このときxの値を求めよ。

まずはこの問題を，ベン図を用いて表す。

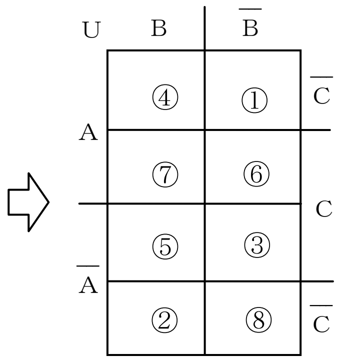


3 つの集合A，B，Cにより，全体集合が 8 つの部分（①～⑧）に分割されることが分かる。そこで，カルノー図でも, 3 つの集合で 8 つの部分に分けられるような表記の方法を考えてみることにする。

パターン1



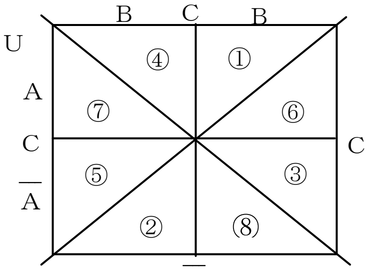
パターン2



パターン1のように表現すると，ベン図の①～⑧の部分をカルノー図で表現することができるが，しかしながら問題を考察していく上では，集合Cの表現のバランスが悪い。そこで，パターン2のように集合Cを中央でまとめる形で表現してみると，やや改善される。しかしながら，これも理解しやすい表現とはいえないので，さらに考察した。

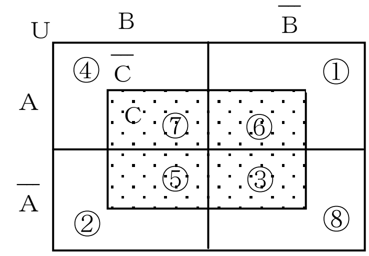
パターン3では，全体集合を対角線で分割し集合Cを左右に補集合 $\overline{C}$ を上下に配置して表現した。

パターン3

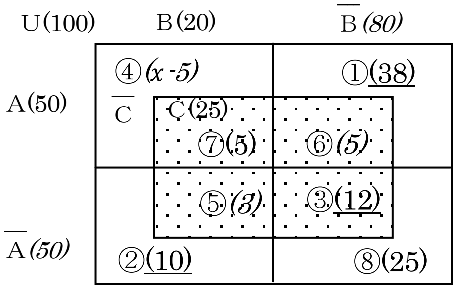


また，パターン4では，集合Cを全体集合の中に表現する方法である。ベン図の表現をカルノー図に取り入れた形となり，集合の関係が非常に分かりやすいものになる。

パターン4



このような表現を用いて集合に含まれる要素の個数が見やすくなる。問題で求めたい x の値は，n(④)+n(⑦)であるが，条件をパターン4に整理しながら，値を入れていく。



※　(○) : 題意の数値
　　(□) : 題意から求められる数値
　　(△) : 図から求められる数値

よって求める x は　$(x-5)+5+3+10=20$　より

$$x=2$$

4　研究の成果と今後の課題

(1)　成果

集合の問題を図で捉えることは，計算においてだけでなく，各集合の関係を理解する上でも非常に重要である。教科書ではベン図を用いてその目的を達成するが，集合の表現方法は他にも存在する。問題に応じた集合の表現方法を考察することで，集合の分野における理解を深められるのではないかと考える。今回の研究においては，その一つとしてカルノー図を提案することができた。

(2)　今後の課題

今回の研究は，身の回りの問題や教科書などで見る問題に対して，集合の図的表現方法を考察するものであるが，指導実践を行うことができなかった。自分自身が数学Ⅰ・Aを担当する際，今回の研究で考察したことをもとに指導し，生徒の興味・関心，理解をどの程度深められるのか検証したいと思う。そこで新たに発見した課題点をどのように改善していくかを研究することが今後の課題である。

《参考文献》

・『高等学校学習指導要領』（文部科学省）
・『高等学校学習指導要領解説』（文部科学省）
・大島利雄ほか　『数学Ⅰ』（数研出版株式会社）
・坪井俊ほか　『数学A』（数研出版株式会社）
・高橋陽一郎ほか『詳説数学A』（株式会社 新興出版社啓林館）