

数学 I, 数学 A における課題学習の研究・実践

愛媛県立三瓶高等学校

藤原 治永

1 はじめに

本校での課題学習の主な取り組みは、①各分野・各単元の終わりに応用的な内容の授業を行う。②長期休業中の課題としてレポートを課し、提出してきたレポートを評価した後、面白い着眼点や良いレポートを生徒達に紹介するというものである。②については、生徒たちもweb上や書籍から題材を見つけてきてはレポートを作成していくのだが、目を見張るようなレポートにはなかなか出せない現状があった。本年度、課題研究委員として指名していただいたのを機に、数学 I および数学 A の内容を中心に研究したいと思い、この主題を設定した。

今年度は、課題学習に対して経験が少ないため、様々な文献などを調べ、できるだけ教科書に記載されていない内容を授業で実施し、生徒たちの興味・関心・意欲を引き出すために、作業を取り入れることを目標に研究を行った。

2 研究・実践内容

- (1) 対象生徒 1 年生および数学探究受講生
- (2) 取り上げた課題
ア ユークリッドの互除法を利用する問題

ある大学の入学式で、みかんを 13579 個、りんごを 34567 個用意して、新入生全員に対し、同じ個数だけ行き渡る様にそれぞれできるだけ多く配ると、みかんが 1234 個、りんごが 1 個余った。新入生の人数を答えよ。

生徒の解答

みかん 13579 個 りんご 34567 個
配り数 12345 個 配り数 34566 個

12345 と 34566 の G.C.M.
 $34566 = 12345 \cdot 2 + 9876$
 $12345 = 9876 \cdot 1 + 2469$
 $9876 = 2469 \cdot 4 + 0$
 G.C.M. = 2469

2469 の約数が新入生の人数の候補
 (1, 3, ..., 823, 2469)

余った数が 1234 個より
 新入生は 2469 人

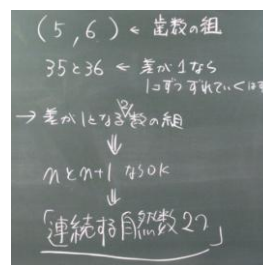
$2469 \overline{) 9876} \begin{array}{r} 4 \\ \underline{9876} \\ 0 \end{array}$

実際に配付したみかんが 12345 個、りんごが 34566 個までは全員求めることができたが、そこから先の方針が分からない様子であった。『同じ個数ずつ配るから、その個数で割り切れる』というヒントを出し、最大公約数へと導いていった。最大公約数 2469 の約数が人数の候補として挙げられるが、余った個数から求める人数は、最大公約数そのものになってしまっているため、最大公約数の「約数」であることには無頓着になってしまった生徒が多かった。問題作成時に工夫を要する。

イ 歯車の歯数の設定について

あなたは歯車を 2 つ作成しようとしている。歯車の歯数をどのように設定すれば、長持ちさせることができるだろうか。

まんべんなく、すべての歯に負担がかかる様にすればよいと設定し、歯数が 24, 32, 35, 36 の歯車を作成し、実験してみた。35 と 36 で歯数の差が 1 であれば適する、つまり連続する自然数の組に設定すればよいことに気付いた生徒がいた。(下図)



差が 1 以外にも適した組合せがあったため、差が素数になればよいのではという考えで調べてみたが、うまくいかなかった。試行錯誤の末、それぞれの歯数が互いに素になるように設定することにはたどり着いたのだが、結果から「連続する 2 つの自然数は互いに素である」ことも生徒達が見つかることができたことには驚いた。さまざまなアイデアを出すことができたことも、表現力の向上に寄与していると思う。

ウ 2 つの砂時計で計れる時間

- (1) 5 分計と 3 分計を用いて 1 分計の方法は?
- (2) 6 分計と 9 分計で計れる時間は?

自然数 m , n を用いて、不定方程式や倍数の性質を利用できる。すべての時間を計ることができる砂時計の組合せも数学的に考えることができる。

エ モンティ・ホール問題

過年度発行の部会誌などで紹介されているので、問題は省略する。事前に何も知らないで、化学教室から借りたマッチ箱（下図参照）を使って簡易ゲームをやってみた。実際に生徒に選ばせて、外れの箱を1つ開けて、「変えてもかまいませんか？」と促すが、「変えません」という答えが殆どであった。理由を聞くと「確率は変わらないので、最初に自分が選んだ方にする」という答えであった。



「変えた方が確率が2倍になるから、変えた方がよい」というマリリン・ボス・サヴァントの答を紹介した。信じられない生徒が多数居たので実験することにした。「変えたとき」と「変えないとき」の「当たり」および「外れ」を数えた。「変えた」場合に当たりが連続したため、早々に変えた方が当たり易い？という実感を持った生徒もいた。結果は下の表のとおりである。

	当たった	外れた
変えた	42	19
変えなかった	15	46

数学的に考えてみようとして時間を取った。一番支持を得た生徒の解答を紹介する。

当 ハズレ ハズレ

当たりを選ぶ確率: $\frac{1}{3}$ ハズレを選ぶ確率: $\frac{2}{3}$

☺ 始めにハズレを選ぶ確率の方が高い!!

(1つのハズレの1つめ)

↓

当 ハズレ

($\frac{1}{3}$ の確率で選んでいる) ($\frac{1}{3}$ の確率で選んでいる)

当たり確率 ハズレ確率

変えたい場合 変えたくない場合

出題の確率 出題の確率

↓ ↓

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

↓ ↓

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$

↓ ↓

変えたい場合 変えたくない場合

↓ ↓

2倍の確率で当たりを選ぶ!!

機械的作業になってしまうので、今回は実施していないが、試行回数を増やせば確率は2倍に近づくと考えられる。また、あくまで確率的に2倍になるということで、実際に変えた方が必ず当たるわけではないことを強調しておいた。

また、条件付き確率を利用した解法についても学習したが、紹介した解答が一番支持を得たように、分かりやすい解答を望む声が多いのは残念である。

オ 数当てカード

16 17 18 19	8 9 10 11	4 5 6 7	2 3 6 7	1 3 5 7
20 21 22 23	12 13 14 15	12 13 14 15	10 11 14 15	9 11 13 15
24 25 26 27	24 25 26 27	20 21 22 23	18 19 22 23	17 19 21 23
28 29 30 31	28 29 30 31	28 29 30 31	26 27 30 31	25 27 29 31

上図の5枚のカードを使う。該当の数字が書かれているカードはそのまま表に、ないカードは裏返してもらい、その人の誕生日（1～31）を当てるゲームである。これが一番生徒たちの関心を惹いた。生徒たち一人一人に5枚のカードを手渡して、ゲームを繰り返して行った。TVの影響もあるのか、生徒達は「これは偶数ですね?」「20から30までですね?」といった私の言い回しに着目していたが、その方法が分からず、すべて当てられるので、相当悔しがっていた。

そのなかで、ある生徒が「一番右のカードは1個飛ばし、右から2番目のカードは2個ずつ2個飛ばし、3番目のカードは4個ずつ4個飛ばし!」という意見を出してきて、面白い!と感じた。事実その側面があったからである。これは予想外であった。

また、ゲームの中で、一番右のカードだけを示された時には、1と答えるしかないので焦った。

そのうち、表になっているカードの左上に書かれている数を足せばよいことに気付いたが、その理由が分からなかったことは残念である。

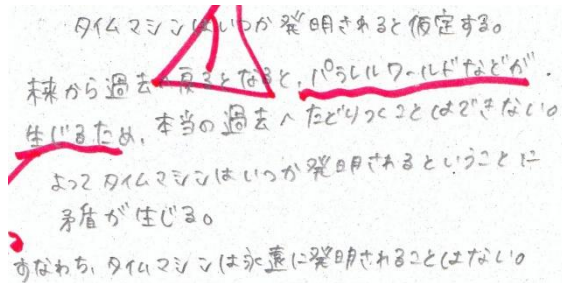
実は16, 8, 4, 2, 1は2のべき乗になっており、全部表であれば2進数の11111、つまり31を表しているということである。2進数を利用したマジックとして生徒たちの心に残ったのではないだろうか。

未だ実施していないが、目付字を次に紹介し、娯楽として数学を楽しんでいた江戸時代の先人達にも思いを馳せるとよいのではないかな。

カ 背理法を利用した証明

夢のない話ですが、「タイムマシンは永遠に発明されることはない」ことを背理法を用いて証明せよ。

背理法は同じクラスにいる生徒の誕生日や無理数の証明によく利用されているが、日常のちょっとしたことに使えないかを調べてみた。前提も何もなく、背理法の学習が終わった段階の生徒に証明させてみた。生徒の解答を紹介する。



パラレルワールドの存在が面白い。パラレルワールドが生じることは正しいのか？という疑問があったが、①パラレルワールドの存在は考えなくてよい②タイムマシンを作ったら未来の人は過去へ必ずやってくるといった前提条件を、より明確にする必要がある。また、職員室で会話をしていると、「夜空の星の光は、過去の光が地球に届いているため、光の速さ以上のスピードで飛ぶことができればそれはタイムマシンと呼べるのでは？」という考えにも触れることができた。

題学習は、自分達が学習した数学がどのように利用されているかを生徒達が実感できる。また、教員の立場からも生徒たちの鋭い着眼点や面白い発想など普通の授業では分からない予想外の発見が数多くあった。

課題としては、時間の確保と題材の選定が挙げられる。課題学習に割く時間がなかなか取れず、長期休業中の課題としている現状がある。また、今回は作業を取り入れて実践することに主眼を置いて研究を行ったため、深い研究に到らなかった。次年度は、分野を絞り一貫性のあつた題材を設定し研究を行いたいと考えている。

《参考文献》

- ・「連分数の不思議」 (木村俊一 講談社 BULEBACKS)
- ・「やじうま入試数学」 (金 重明 講談社 BULEBACKS)
- ・「大人のための数学勉強法」 (永野裕之 ダイアモンド社)
- ・「謎解き父さん」 (伴田良輔 朝日新聞社)
- ・「とんでもなく役に立つ数学」 (西成活裕 朝日出版社)
- ・「数学ガールの秘密ノート／整数で遊ぼう」 (結城浩 SBクリエイティブ)

(3) 実施予定課題

ひき逃げ事件が起きた。目撃者は、タクシーが人をひいたと言っている。町にはタクシー会社が2社、A社とB社がある。A社の車の色は青、B社の車の色は白。目撃者は「白いタクシーを事故現場で見た」と言っている。
 ただし、事故現場は見通しが悪かったので、見間違える可能性を20%と考える。また、この町に走っているA社のタクシーとB社のタクシーの台数を調べてみると、A社が85%、B社が15%のタクシーであったとする。
 この目撃証言は信用できるか？

3 研究のまとめと今後の課題

今回教科書は殆ど参照せず、店頭で購入した書籍を参考にして実践した。知識としての紹介に留まることなく、生徒達に（カードを使う、マッチ箱で実験する、歯車を作って動かしてみる）といった作業を取り入れることに努めた。特に2-(2)のイ、エ、オについては生徒たちの意欲を引き出すことに成功した。

この研究を行うことで、生徒たちの数学に対する意識が「面白い、楽しい」だけでなく、試行錯誤しながら考え、検証していく姿勢ができてきた。このように、課