

数と式における課題学習の研究

愛媛県立伊予高等学校 薬真寺裕

1 はじめに

今年度から本校に赴任し、教科指導について大きく環境が変わり、良い意味で刺激を受けている。そのような日々の授業の中で、共通して感じることもある。それは「定着」ということである。公式をそのまま暗記し、当てはめ答えを導くことができるが、問い方を変え応用問題になると導くことができない生徒が多い。また、基礎・基本の定着を図るためにも、「なぜそのようなになるのか？」という部分を丁寧に伝えなければならないと感じることも多い。例えば、数学Ⅱ及び数学Ⅲの極限において以下問題の考察として、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 P}{x} \times \frac{3x}{x} \times \frac{0 P}{0} \times 0$$

と答えてしまうことや、数学Ⅰの三角比の場面では

$$\tan \frac{\sin}{2} \times \frac{y}{x} \times \frac{1}{0} \times 0$$

いずれも場合も「0」で割ることをしっかり理解できていないことによるものである。そこで日々の授業の中で生徒の考察及び誤答例を分析した。数学Ⅰの目標の中に、「理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図る。」と示されている。数学の本質である理論や単純な原理をより深く追究していくことにより、「なぜ？」という部分の理解を深めることで、授業理解を高めることができると考え、この主題を設定した。

2 「0」で割ってなぜ悪い①

(1) 導入

$$0C \ 15x \ \square, \ 15C \ 0x \ \square$$

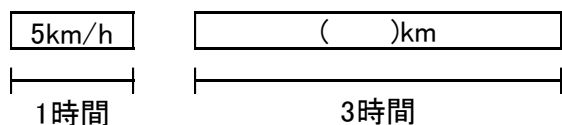
この2つの違いを考えさせる。生徒に挙手をさせて聞いてみると「両方とも0になる」と答える生徒が多い。中には、何かを察知して、よく分からないが「0にならない」気がする答える生徒もいた。ちなみに、代表生徒に実際に電卓をたたかしてみた。

$$15C \ 0x \ E(\text{エラー})$$

で、電卓は計算を受け付けない。それは「打ち込んだ、あなたの間違い！」と言わんばかりである。「0で割っていけない」その説明についてはいろいろな方法があるが、いずれも「なるほど、わかった」という「心からの納得」につながる説明を考えることにした。

(2) 展開

問1：時速 5 km/h で 3 時間進むと何 km 移動するか？



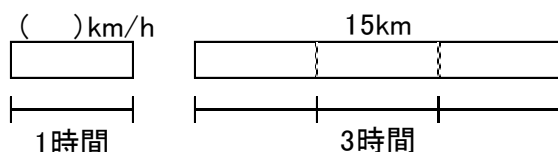
$$5\text{km/h} \times 3\text{時間} = 15\text{km} \quad \text{答え：} 15 \text{ km}$$

これをまとめると

$$(\text{速さ}) \times (\text{時間}) = (\text{距離}) \dots \textcircled{1}$$

となる。

問2：時速 x [km/h] で 3 時間進んだら 15 km 移動した。時速を求めなさい。



$$x \times 3\text{時間} = 15\text{km}$$

$$x \times \frac{15\text{km}}{3\text{時間}} = 5\text{km/h} \quad \text{答え：} 5 \text{ km/h}$$

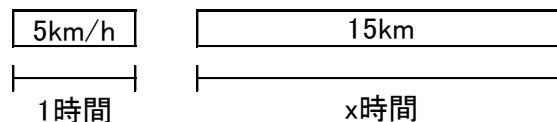
これをまとめてみると

$$(\text{速さ}) \times \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})} \dots \textcircled{2}$$

となる。

問3：時速 5 km/h で 15 km 移動するには何時間かかるか。

x 時間かかったとする。



$$5\text{km/h} \times x = 15\text{km}$$

$$x \times \frac{15\text{km}}{5\text{km/h}} = 3\text{時間} \quad \text{答え：} 3 \text{ 時間}$$

これをまとめてみると

$$(\text{時間}) \times \frac{(\text{距離})}{(\text{速さ})} \dots \textcircled{3}$$

となる。

0で割ることについて考えさせているが、基本的な文章題を解かせ関連があるのかどうか感じる生徒も多くなる。そこで、次の問題を考える。

問4：時速 $\frac{15}{0}$ km/h とはどんな速さになるか。問2の問題を、答えが $\frac{15}{0}$ km/h となるように変え、そのことにより考察しなさい。

問2の答えが $\frac{15}{0}$ km/h となるためには問題文の3時間のところを0時間とすればよい。このことから $\frac{15}{0}$ km/h とは

0時間で15 km進む速さである。ここで、この解答は本当に正しいのか検証する。0時間で15 km進める速さとはいったい時速何kmなのか。地球上で最も早く進むと言われる「光」でさえも、1秒間で地球を7周半するが、0秒では1 cmも進むことができない。そのため、問4の最終結論として、「 $\frac{15}{0}$ km/hとは0時間で15 km進める速さではあるが、そのような速さは存在しない。」とするのが妥当であろう。

問5： $\frac{15}{0}$ 時間は0時間のことか、
問3を用いて考察しなさい。

問3の時速5 km/hのところを時速0 km/hとして考えてみる。 $\frac{15}{0}$ 時間とは時速0 km/hの速さで15 km移動するのにかかる時間となる。このことから $\frac{15}{0}$ 時間とは0時間のことではないことがわかる。さらに、時速0 km/hなら何十時間たつたとしても1 cmも動くことはできない。つまり、 $\frac{15}{0}$ 時間などという時間は存在しない。

問4・5より、 $\frac{15}{0} \times 0$ とはならないこと、 $15 \div 0$ は考えることはできないことを確認することができた。

(3) 考察

①式より

$$(\text{速さ}) \times (\text{時間}) = (\text{距離})$$

この式の左辺の速さが0 km/hだと、時間が何時間たつても距離は0 kmとなる。さらに、0 km以外はあり得ない。

$$\begin{aligned} 0\text{km/h} \times 2\text{時間} &= 0\text{km} \\ 0\text{km/h} \times 100\text{時間} &= 0\text{km} \end{aligned}$$

また同じように時間が0時間だと、時速が何km/hでも距離は0 kmとなり、0 km以外ありえない。

$$\begin{aligned} 5\text{km/h} \times 0\text{時間} &= 0\text{km} \\ 100\text{km/h} \times 0\text{時間} &= 0\text{km} \end{aligned} \dots \textcircled{4}$$

この「0は何をかけても0になる」ことが0で割ることを考えられない理由となる。そして、 $\frac{0}{0} \times 1$ について式④を用いて考えてみると

$$5\text{km/h} \times \frac{0\text{km}}{0\text{時間}} \times 100\text{km/h}$$

よって $5\text{km/h} \times 100\text{km/h} \quad ???$

となり、 $\frac{0}{0}$ は考えることができないことになる。細かい証明となると代数学の体の公理、等号の公理を用いることになるが、直感的に「0で割ってはいけない(禁止)」ではなく「0で割ることは定義できない」と理解できる。

3 「0」で割ってなぜ悪い②

0で割ることは認められていないことについて、別の角度からの説明を考える。教科書のコラムの欄に短編として、なぜ0で割ってはいけないかの説明に以下のような記述がある。

$x \times 0$ とする。
両辺に1を加えて・・・①
 $x \times 0 + 1 \times 1$
両辺に $x \times 1$ をかけて・・・②
 $x^2 \times 1 + x \times 1$
両辺に1を加えて
 $x^2 \times x + x$
両辺を x で割って・・・③
 $x \times 1$
よって、
 0×1

ここで、①、②においてそれぞれ両辺に加える数を a 、かける数を $x \times a$ とし、同様の計算をすると0は a に等しくなる。 a はどんな数であってもいいことから、結局すべての数は0に等しいことがいえてしまう。この証明の誤りは、③のところで両辺を $x \times 0$ で割ったことにある。これらのことから除算では、0で割ることは認められていないことがいえる。

(1) 数からの説明

割り算は、逆数のかけ算

$$x \div y = x \times \frac{1}{y}$$

を表していることから $1 \div 0$ は、1に0の逆数をかけることと考えればよい。そこで、0をひとつの数、存在する数とみてその逆数を求める。逆数の定義から $0 \times \square = 1$ となる \square が求められればよい。しかし、0にどんな数をかけても0となることから、かけて1になる数を見つけることはできない。0の逆数 $\frac{1}{0}$ なる数は存在しないことから、 $1 \div 0$ は計算できないことが説明できる。

(2) 演算からの説明

$\frac{1}{0}$ は、 $1 \div 0$ の計算の結果としてみることもできる。 $1 \div 0$ は、1を何もないもの、あるいは0という数で実際に割ったものである。もちろん、何もないもので割ることはできないことから、この場合は無あるいは0に限りなく近づけた数で割ると考えて、どんな値に近づいていくかを予想してみる。

$$\begin{aligned} 1 \div 0.1 &= 10 \\ 1 \div 0.01 &= 100 \\ 1 \div 0.001 &= 1000 \end{aligned}$$

割る数は負の値から0に近づけることもでき、その除算した値は、今度は負の無限大に近づいていく。このことか

ら、 $\frac{1}{0}$ の値は数直線上で0を起点として左右の方向に無限に伸びた先にあると考えられる。結局、その値は確定できないので存在しないと約束した方がよいことが説明できる。

4 日常生活の中の「0（ゼロ）」

(1) 数え年【年齢と0（ゼロ）】

昔、日本では人間の歳つまり年齢を「数え年」でいていた。これによると人は生まれた瞬間、既に1歳だったということである。生まれて1歳、翌年の正月になると2歳となる。したがって、12月末に生まれた子どもは正月になるとすぐに2歳になるということになっていた。これは、昔からの習慣であり、徴兵制度も数え年21歳で男子は徴兵検査を受けてきたという経緯もある。しかし現在では、諸外国同様、満年齢で数えるようになっていて、生まれれば0歳、第1回目の誕生日を迎えてはじめて1歳（満1歳）となる。ここでは、ゼロの活躍が見られるように変わったのである。

(2) 降水確率【0（零：れい）と0（ゼロ）】

「明日の中予地方の降水確率は0（零：れい）%です」というように天気予報での降水確率0%は必ず「零：れい」と読まれる。「ゼロ%」と読むことはない。これには、2通りの考え方がある。

ア 零とゼロの意味の違い

「零」と「ゼロ」の違いは語源の違いというわけではなく、意味そのものに違いがある。つまり、「ゼロ」は全くなし、無の意味であるが、「零」はその他にも「きわめて小さい」という意味があり、意味そのものが違うという見方である。「零」には零細企業などの言葉にあるように「わずか」や「規模が小さい」などの意味もあり、こうしたことから天気予報の降水確率を「零パーセント」と言うのは雨が降る確率が「わずかでもある」ということを示していて、決して0（ゼロ）＝無ではない（雨が降ることもわずかにある）ということの意味していると考えられる見方である。

イ 外来語と漢語の違い

「零」という漢字には「わずか」という意味はあるが、数詞の「れい」にはそのような意味はない。降水確率の0%は当然のことながら、数詞の「れい」である。アナウンサーが「ゼロパーセント」と読まないのは単に「ゼロ」が漢語以外の外来語だからだとする考え方もある。

零とゼロの区別ははっきりしておらず、習慣や発音の聞き取りやすさなどが影響している。アナウンサーは大和言葉や漢語に統一しがちであるが、日常において0の読みはさまざまであることがいえる。例えば、電話番号の0はゼロ、0点は零点などそれぞれの場合で習慣付いているとされる。

(3) 階数【地階と0（ゼロ）】

日本の建物には0階がない。どんな建物であっても1階にはじまり、上に2階、3階・・・と続いていく。下へは、地下1階、地下2階・・・となっていて、つまりこれはマイナス1階、マイナス2階・・・ということを示している。このつくりは、アメリカでも同様だといわれる。しかし、イギリスやフランスには0階があり、日本やアメリカの1階は、イギリス、フランスでは0階（“Ground Floor”と呼ぶ）となる。つまり、地面から上のほうへ1階、2階・・・となっている。

(4) 標高【ゼロメートルと0（ゼロ）】

山の高さや海の深さは、海面をゼロメートルとして上下に測った長さである。毎日の海面の上昇下降は、月の引力も手伝って、潮の流れ（干満）によるものであるが、平均的海面の高さをゼロメートルとしている。しかし、オランダのネーデルラント地方のように、海面より低いところに住んでいる人もいる。これらの地は「ゼロメートル地帯」と呼ばれているが、本当は「マイナス地帯」というのが正しいのだろうか。

4 おわりに

数学は、長い年月を経て、歴史を築きあげてきた人々の知恵であり、活用され、学問として今に至っている。このような調べ学習や追究するといった活動を通して、「実はこうした歴史がある、こんな見方や考え方もできる」ということを実感させることができた。また、学び方や物の見方・考え方、問題解決能力を養う時間、及び言語活動が重要視されてきている。こうした中で、積極的に課題を持ち、さまざまな手段を使って調べ、まとめる、自分の主張を表現するといったことは今後ますます求められていくと考える。ドリルで知識や技能の定着を図る方法も有効であるが、生徒のつまづきを分析し、理解を深めることで知識の定着を助けることができる。日頃の授業の中で、引き続き研鑽を続けていきたい。