数学Ⅰ，数学Ａにおける課題学習の研究・実践

愛媛県立三瓶高等学校　　　　藤原　治永

１　はじめに

本校での課題学習の主な取組は，①各分野・各単元の終わりに応用的な内容の授業を行う。②長期休業中の課題としてレポート（テーマは自由）を課し、提出してきたレポートを評価した後、面白い着眼点や良いレポートを生徒達に紹介する。ただ、②については、生徒たちもネットや書籍から題材を見つけてきてレポートを作成してくるのだが、目を見張るようなレポートにはなかなか出会えない。また、冬期休業中の課題としており、この紙面では成果を伝えることができないため、昨年に引き続き、数学Ⅰおよび数学Ａの内容を①を中心に研究した。

昨年度は、実験や作業を通しての研究を行ったが、今年度は担当講座も代わり、時間がますます限定されることが予想されたため、文章から題意を理解する読解力の向上と、教科書と違った側面からものごとを考える力の養成の２つについて課題を選定し、実践してみた。

２　研究・実践内容

実施時期は単元が終わってからの実施がほとんどであるが、単元の初めや途中に実施または紹介することもあった。

(1)　数え上げ

> あるドーナツ店では、３種類のドーナツを売っている。ある日、20 人の客がやってきた。どの客も買ったドーナツは３個以下であった。その 20 人の中に、同じ注文をした客は居ただろうか？

ドーナツをＡ，Ｂ，Ｃとし、３個以下の注文の仕方を列挙すると全部で19通りある。全部で20人の客が来たので、鳩ノ巣原理により同じ注文をした客は少なくとも２人は居たこととなる。解答の方針が全く立っていない様子であったため、まず注文の仕方を数え上げるよう誘導を行った。「１個の注文もあれば、３個の注文もあるよね」という確認の意見が出たが、個数で場合分けすることまでは考えつかない様子。ヒントを出したが、場合分けに時間がかなりかかってしまった。「同じ注文をした客」の意味がよくわからないという質問があったので、補足が必要である。

鳩ノ巣原理については、「19種類の注文に対して20人の客がいることを考えて」という紹介をした。文章題であり、教科書の例題や問題とは違う切り口に戸惑っていたが、少しずつヒントを出していくことにより、思考力を養成する一助になったと思う。

(2)　確率

> Ｄさんが「２つのさいころを投げたとき、目の和が５と６になることが多く、その出現率は同等に思える。しかし、さいころが３つの場合、目の和が９になるより 10 になる方が多いような気がするが、私の勘違いだろうか？この直感が合っているのか、間違っているのか、科学的（数学的）に教えてほしい」と相談してきた。Ｄさんの悩みを解決して欲しい。

出現率とは、その目が出る確率であり、２個のさいころを投げるときは、確率の分母は36通りで等しいため、場合の数で比較するように誘導した。３個のさいころの場合、全部書き出すのは時間がかかると判断、前回の数え方を生かして「３個すべてが同じ目」「２個が同じ目」「３個すべてが異なる目」に分けて考えようとした生徒がいた。３つのサイコロの和が９になるのは25通り、10になるのは27通りとなるので、Ｄさんの後半の直感は正しい。

(3)　余弦定理

> 「円周率πは 3.05 より大きい」ことを次の設問に答えながら、証明せよ。
>
> 半径が１の円に内接する正八角形を考える。
>
> (1) 円周の長さ ℓ を求めよ。
> (2) 正八角形は８個の合同な二等辺三角形に分割することができる。この二等辺三角形の頂角の大きさを求めよ。
> (3) 正八角形の一辺の長さ x を求めよ。
> (4) 円周率πは 3.05 より大きいことを示せ。
> (5) 正十二角形の場合も同様に調べてみよ。

余弦定理を学び、不等式の証明と二重根号の内容を理解すれば、2003 年の東大入試問題も解くことができるだろうと考え、既知の内容を組み合わせて考えることの大切さを認識させようとした。実際には、(4)において(3)までの結果を活用できなかった生徒がほとんどであり、ヒントを出さないと次へ進めなかった。しかし、二重根号を外そうと試みた生徒がおり、挑戦する姿勢が少しずつ出てきたと感じた。ここで、$\sqrt{2}=1.414$を用いることや、数学Ⅱの範囲である不等式の証明について紹介した。(4)を解き終えた後、「正答に至るプロセスを小問で誘導はしたが、ある大学の入試問題である。どこだと思うか」と生徒に問いかけた。10 年以上前の過去問ではあるが、解けたという達成感と、考えようという意欲を引き出せたように思う。これ以外にも、円に内接する正多角形の周と、外接する正多角形の周の二つで円周をはさみ撃ちする方法や、方眼紙で円の面積を求めて円周率を求める方法など、先人の知恵を学び、解決の方法を調べて、生かすことができるようになっていってほしい。

(4) 集合から対偶へ

> A さんが風邪をひいているとき、B さんは風邪をひいていません。では、「B さんが風邪をひいているとき、A さんは風邪をひいていない」といえるのでしょうか？

問題を一読して、生徒から一言「これは数学の問題なんですか？」との質問があった。生徒たちの数学の問題に対する印象を変えなければいけないと感じた。さらに、「Bが風邪をひいているとき、Aは風邪をひいてないとは限らない」という意見が多かった。対偶を用いた証明問題として扱えるが、AとBのかぜの状態を調べると、風邪をひいている状態を×、風邪を引いていない状態を○で表すと、

① 「A：×」かつ「B：×」･･･両方とも風邪
② 「A：×」かつ「B：○」･･･Aだけが風邪
③ 「A：○」かつ「B：×」･･･Bだけが風邪
④ 「A：○」かつ「B：○」･･･両方とも元気

の４つになる。題意より①の状態があり得ない。残りの②③④の中で、Bが風邪をひいている状態なのは③しかない。つまり、『「A：×」⇒「B：○」』が成り立つとき，『「B：×」⇒「A：○」』が成り立つ。集合から自然に対偶につなげることができた。

(5) 平均（平らに均(なら)す） その１

> Ａ君とＢさんの会話から、ｘの値を求めよ。
> Ａ：５科目の最後のテストが100点だったよ。
> Ｂ：すごい！本当に100点満点のテスト？
> Ａ：ひどいなぁ。100点満点のテストだよ。他の４科目は悪かったから、助かった。
> Ｂ：数学で100点とったから、平均点が上がったのね。
> Ａ：そうだよ。おかげで、平均点が５点も上がったよ。
> Ｂ：Ａ君の５科目の平均点はｘ点かぁ。
> Ａ：なんで分かるの？平均点言ってないのに。

求める平均点をｘとおいて、１次方程式を解く方法もあるが､数学の得点を４科目に分けて５点アップするように棒グラフを考えるとよい。数学の20点分を他の4教科に分配して､高さを同じにする（均す）と、５科目はすべて80点となり、平均点は80点となる。また，数学も５点アップしたので、４科目の平均点は75点である。この解法は、文章題を苦手としている生徒にとっても分かりやすく、「たくさんの数値を平らに均した」という平均点の意味も印象づけることができた。

(6) 平均（平らに均(なら)す） その２

> 「平均水深５㎝の池で人が溺れた！」とのニュースが流れた。５㎝といえば、大人のくるぶしにも満たないほどの深さである。そんな条件の池で溺れる原因としては次の①～③のどれが考えられるだろうか。
> ① 酔っ払いが浅い池で転倒､起き上がれず…。
> ② 自分で起き上がれない幼い乳幼児が…。
> ③ 大人も完全に沈み込むような深瀬に…。

どれも原因になり得るが、「平均」を重視すると③ではないだろうか。平均という言葉に着目すると、平均水深５㎝ということは、水深１㎝の箇所もあれば、水深２ｍの箇所もあり得る。浅い所や深い所を一律に均したら水深が５㎝になるといっているに過ぎない。生徒からは「現実的にそんな池は無いのでは？」「①は酔っていても、上を向けると思うので、息ができる」「②は首が据わってないので息ができないから」「③の意味が分からない」という意見があった。もう少し、現実に即した問題になるように工夫を要する。また、「水深５㎝ だから

〇〇～」の意見に対して、「でも平均がひっかかる」と着眼点は良かったが､具体的にどう説明したら良いか分からないという生徒もいた。

(7)　代表値

新聞を読んでいると、その年の「２人以上の世帯の平均貯金額」は 1739 万円と書いてあった。真相は次の①～③のうちのどれだろうか。 ①　本当に平均貯金額は 1739 万円である。 ②　よく調べたら、共働き世帯の平均貯金額だった。 ③　よく調べたら、正規雇用の社員の平均貯蓄額だった。

生徒の実態に合わせて「２人以上の世帯とはどのようなものか」と問いかけ、説明するところから入ることも必要である。これも、生徒からは「誰かが情報操作したいから、②」「もしデータが間違っていたら、その訂正と差替えがしんどいので①」という意見が出た。

答えは①であり､平均値が代表値として不適切な例として紹介できる。平成25年度のデータによると、中央値が1023万円、最頻値が約50万円。2000万円未満が全体の約72%,4000万円以上が11%であると紹介した。１つの指標からだけでなく、複数の見方ができるようになってほしいものである。

(8)　分散の求め方

(1)　$\dfrac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}$ を展開せよ。 (2)　$\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ を展開せよ。 (3)　a,bに関する次の恒等式を考察せよ。 $\dfrac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

この問題は、１問ずつ提示・解答し、(3)では、数学Ⅱで習う恒等式の紹介をし、考察を促す。

２数 a,b の平均が$\dfrac{a+b}{2}$、２乗の平均が $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ であることに気づくことができれば､左辺は偏差の２乗の平均であることから､分散を求める式の一例になっていることが分かる。また、分数の計算が苦手な生徒も居るため、(1)の分子をまず計算させてから，それを２で割る誘導も必要かもしれない。

(9)　実施したい課題

2020 年に開催される東京オリンピックのエンブレムについて考察せよ。

特別な３つの菱形を考え、敷き詰める。また、その菱形の各辺の中点を結んだ長方形を考えるなど、さまざまな考察ができるようだ。

３　研究のまとめと今後の課題

昨年度に引き続き、教科書は殆ど参照せず、店頭で購入した書籍を参考にして実践した。昨年度とは担当講座が違い、実験や作業は取り入れることがほとんど出来なかったが、やはり自分で確認するという作業があった方が生徒の理解や反応が良いように感じた。

生徒からは､「一見簡単そうな問題が多かったが､取り組んでみるとやりがいのある､頭を使う問題だった」「見かけではすぐに答えを出してしまいがちだが、じっくり時間をかけて解いていくと、納得した答えを得られたときに達成感を感じた」という感想があった。

この研究を行うことで､生徒たちの数学に対する意識だけではなく､自分自身も教科書以外の見方や考え方を習得することができた。

課題としては、昨年度に引き続き、時間の確保と題材の選定が挙げられる。課題学習に割く時間がなかなか取れず、長期休業中の課題としている現状がある。また、数学Ⅰおよび数学Ａの範囲に限定しているので､その範囲から題材を探すのはなかなか難しい。次年度は、分野を絞り一貫性のある題材を設定し研究を行いたいと考えている。

≪参考文献≫

・「なぜか惹かれるふしぎな数学」
（蟹江幸博　実務教育出版）
・「統計力クイズ」　（涌井良幸　実務教育出版）
・「東大のディープな数学」
（大竹真一　KADOKAWA）
・「ピジョンの誘惑」　（根上生也　日本評論社）
・「数学ガールの秘密ノート／優しい統計」
（結城浩　SBｸﾘｴｲﾃｨﾌﾞ）