図形と計量における課題学習の研究

愛媛県立今治東中等教育学校　　中村　りか

1　はじめに

学習指導要領において、課題学習とは、「内容またはそれらを相互に関連付けた内容を、実生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習活動を促し、数学のよさを認識できるようにする」とある。また、内容の取扱いでは、「それぞれの内容との関連を踏まえ、学習効果を高めるよう適切な時期や場面に実施するとともに、実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする」とある。一人でも多くの生徒が、数学は身近なものであると感じ、数学の楽しさやよさに気付くことのできる課題とは何かを研究したいと考え、この主題を設定した。

2　研究の目標

課題を解決する過程において、図を用いて考えさせる幾何的な力をつけさせるようにする。図形が決定した後の計算においては、三平方の定理や正弦定理などの、図形を解くための基本的な公式を用いて計算して、答えを導くことで、三角比の有用性を感じることができるようにする。また、空間図形の問題を平面で捉えて解く手法で解決することで、三角比の有用性を理解させるようにする。

3　研究の内容

課題１　一辺 15 ㎝ の正三角形のチョコレートを正方形の箱に詰めて、中でカタカタ動かないようにするためには、正方形の一辺の長さをどのくらいにすればよいか。

(1)　図を書いて予想する。

(2)　カタカタ動かないための条件を考える。

「正三角形の頂点は必ず四角形の辺または頂点上にある」

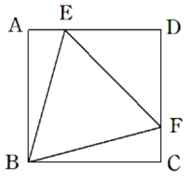
・頂点がすべての辺の上にある場合、スライド移動してしまう。

・頂点が２つ重なる場合は、正方形にならない

よって、以下の条件となる。

「正三角形の頂点のうち少なくとも一つは、四角形の頂点と重なる」

【解答】



図①

図①の場合の正方形の一辺の長さを求める。

正三角形と正方形より、

△ABE≡△CBF（直角三角形）

対角線 BD に関して、線対称になっていることがわかる。

$$\frac{BC}{BF} = \cos 15°$$

$$BC = 15\cos 15°$$

$$= 14.48$$

よって、正方形の一辺の長さは約 14.5 ㎝。

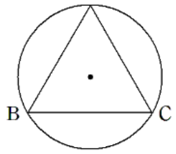
課題２　一辺 15 ㎝ の正三角形のチョコレートを円形の箱に詰めて、中でカタカタ動かないようにするためには、円形の箱の半径の長さをどのくらいにすればよいか。

(1) 図に書いて予想する。

(2) カタカタ動かないための条件を考える。

「正三角形の頂点が円周上にある」

【解答】



図②

外接円の半径を求めればよいので

正弦定理により

$$2R = \frac{15}{\sin 60°}$$

$$R = 5\sqrt{3}$$

よって、半径の長さは約 8.7 ㎝である

※　課題２においては、二等辺三角形、３辺の長さが違う三角形に変更することで、正弦定理や余弦定理の有用性を認識できる問題になる。

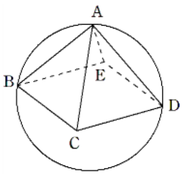
課題３　各辺の長さが 12 cm のピラミッド型（正四角錐）のチョコレートをボール型（球形）の入れ物に詰めて、中でカタカタ動かないようにするためには、ボール型の入れ物の半径の長さをどのくらいにすればよいか。

(1) 図に書いて予想する。

(2) カタカタ動かないための条件を考える。

「正四角錐の各頂点が球面上にある」

【解答】



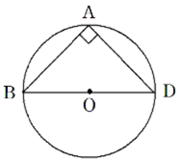
図③

球の中心は、

・正方形 BCDE の外心（対角線の交点）の鉛直方向にある。

・点 A から正方形 BCDE に下ろした垂線上にある。

３点 A、B、D を通る平面で切った断面で考える。



図④

図④のように直角三角形になるので、球の中心は正方形の対角線の交点である。

$$BD = 12\sqrt{2}$$

$$BO = 6\sqrt{2}$$

よって、球の半径は約 8.5 cmである。

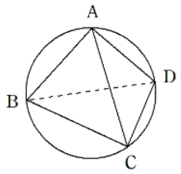
課題４　各辺の長さが 12 cm の正四面体のチョコレートをボール型（球形）の入れ物に詰めて、中でカタカタ動かないようにするためには、ボール型の入れ物の半径の長さをどのくらいにすればよいか。

(1) 図に書いて予想する。

(2) カタカタ動かないための条件を考える。

「正四面体の各頂点が球面上にある」

【解答】

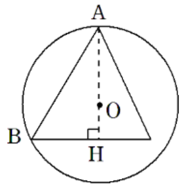


図⑤

正四面体の半径 R を求める。

球の中心は、点 A から△BCD の重心に下ろした直線上にある。

２点 A、B と、重心を通る平面で切った断面で考える。



図⑥

△ABH において三平方の定理より

$$AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$= 12^2 - (4\sqrt{3})^2$$

$$= 96$$

$$AH = 4\sqrt{6}$$

△BHO において、三平方の定理より

$$BO^2 = BH^2 + HO^2$$

$$R^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{6} - R)^2$$

$$R = 3\sqrt{6}$$

よって、球の半径は約 7.3 cmである。

4　研究のまとめ

最近の生徒は空間図形を苦手としており、想像すらできない生徒も多い。考えることの楽しさを感じたり、既知の公式や定理から適切な方法を選択、利用することができたりと、生徒の関心や意欲を高めることのできる問題選びが必要だと考える。

課題学習は何のために行うかについて、学習指導要領では「生徒の数学的取り組みを促し、思考力、判断力、表現力等の育成を図る」とある。より多くの生徒が、数学のよさを認識できるようにするために、私自身の知識や技量もさらに向上させていかなければならない。