思考力を養成する課題学習の研究・実践

愛媛県立三瓶高等学校　　　　藤原　治永

１　はじめに

本校での課題学習の主な取組は，①各分野・各単元の終わりに応用的な内容の授業を行う。②長期休業中の課題としてレポート（テーマは自由）を課し、提出してきたレポートを評価した後、面白い着眼点や良いレポートを生徒達に紹介する。ただし、②については、生徒たちもネットや書籍から題材を見つけてきてレポートを作成してくるのだが、目を見張るようなレポートにはなかなか出会えない。また、冬期休業中の課題としており、この紙面では成果を伝えることができないため、今年度は数学Ⅰ・Ａにこだわらず、数学Ⅱを履修済みの３年生を対象に、数学に対する興味・関心を起こさせ、思考力を高めるような課題研究の実施を試みた。

昨年度は、文章から題意を理解する読解力の向上と、教科書と違った側面からものごとを考える力の養成の２つについて課題を選定・実践した。今年度は直感を裏切る類の課題も選定し、昨年に引き続いて思考力の養成を目指した。また、導入された電子黒板やタブレットの活用を念頭に入れて実践した。

２　研究・実践内容

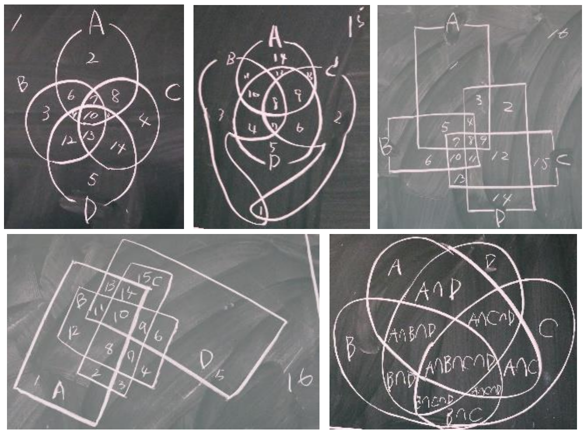
前述の３年生について、事前に生徒たちの興味関心を高め、レポートを作成させ、簡単に発表させた。その後、いくつかのテーマに取り組ませた。

(1)　集合によって分けられる領域の数

全体集合Ｕに対して，その部分集合がｎ個存在するとき，いくつの領域に分けることができるか。また，n=4 のときのベン図をかけ。ただし，それぞれの部分集合の共通部分は空集合でないとする。

n=2,3のときは図示が容易であり、それぞれ４個、８個の領域に分けることがわかるが、２つの部分集合が重なる領域、３つの部分集合が重なる領域をすべて書き出させることで確認をさせた。

n=4のとき、生徒たちの出した答は14個の領域という予想通りのものであった。前述の書き出しを参考にして、本当かどうかを確かめさせた。その結果、部分集合を円で表す方法では、すべての領域は図示できない。試行錯誤して、楕円、四角形、テトリスのブロック状の形、餅のように伸びたものなど、多数のアイデアが出た。また、n 個の部分集合があるとき、2^n 個の領域に分けられることは、 n=4 までの答から容易に予想できていた。



(2)　エジプト分数に挑戦

古代エジプトでは、単位分数（分子が１）の和で表していたらしい。⑩を目標とし、＋αとして９月29日の授業にちなみ、⑪を出題した。

> 次のx,y,z,wに当てはまる数を入れ、式を完成せよ。ただし，x,y,z,wには２以上の自然数が入り、それぞれ異なるものとする。
>
> ① $\frac{2}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$　　② $\frac{3}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
>
> 〜中略〜　　⑨ $\frac{3}{7}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$
>
> ⑩ $\frac{14}{17}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}$
>
> ⑪ $\frac{9}{29}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}$

生徒たちは 3/4 = 6/8 = 4/8+2/8 = 1/2+1/4 というように、何とか通分で答えようとしており、分母が一桁である⑨までは時間はかかるが、正答までたどりつく。しかし、⑩になると難しい。そこで、⑨までの解答を見返して、法則や規則がないかを考えさせた。分数を小数に直すことにより、

ある程度推測できると考えた生徒がいたので、「分子の14は、分母17の半分以上であることを利用して、14/17-1/2 = 11/34となる。続いて、11/34を考えると分子11は分母34の1/3未満、すなわち次の分数は1/4」という具合に、授業を展開していった。

実際には、次のような操作をすると機械的に解ける。まず、分母17を分母17より大きい最小の分子14の倍数28で置き換えて引く。

$$14/17-14/28=14/17-1/2=28/34-17/34=11/34$$

11/34についても同じ作業を行い、分子が１になるまで続けると、14/17 = 1/2+1/4+1/14+1/476となる。また、答は一意ではない。

この単位分数の和に分解する方法から、実数を分数で近似することにもつなげたい。

(3) 簡単なレポート作成および発表

生徒自身が自由にテーマを設定し、調べてレポートを作成した。テーマは次のとおりである。

① 水平線・地平線までの距離の計算方法
② 坂道の角度を表す%表示について
③ 扇形の面積
④ 古代エジプトの計算法について
⑤ 面積の求め方
⑥ 偶数と奇数の関係
⑦ 星形の角の和について
⑧ 図形の中から正方形を見つける

１人につき５分を目安に発表させた。エジプト分数つながりで、計算方法を調べてきた生徒がいた。関連のあるテーマについて、探究しようとする姿勢がみられたことは喜ばしい。また、面積について調べてきた生徒が多かったので、次のテーマは面積にしようと考えた。

(4) 扇形・円錐台の側面などの面積

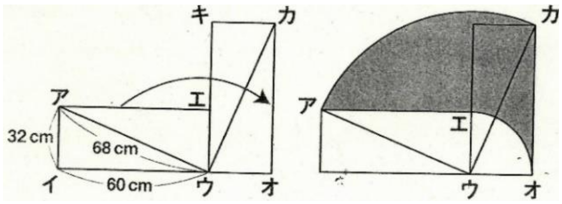
求積問題は、細かく分けた図形の面積の和として考えることが基本だが、単に公式を利用するだけの生徒が多いのではないか。そこで、バウムクーヘン状の図形の面積を求める方法について考察し、それを応用した求積問題を解くことにした。内容は小学生の内容ではないかと思われるほど易しく思えるのだが、一筋縄ではいかない問題である。

数学Ⅱの弧度法の単元において、扇形の面積の公式を覚えるイメージとしてトイレットペーパーを切断したり、バウムクーヘンをイメージさせたりしたことの復習から始めた。

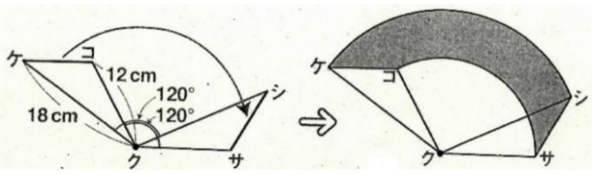
バウムクーヘン状の図形（円錐台の側面）の面積を求めるためには、中心線の長さ（内側の円弧の長さと外側の円弧の長さの平均値とする）に幅の長さをかけると簡単に求めることができる。

問題例を以下に示す。

Q．図の長方形アイウエを，ウを中心として90度回転させるとき、辺アエが通る部分の面積を求めよ。



Q．図の三角形クケコを，クを中心として120度回転させたとき、ケコの回転によってできる部分の面積を求めよ。



補助線を引いて、バウムクーヘン状の図形（円錐台の側面）の面積を求めればよい。

(5) うるう年の考察

(2)の内容を利用して、うるう年についても考察した。現在使用されているグレゴリオ暦は、春分の日が年によって大きくずれないことを目的として、うるう年を「400年に100回」入れていたユリウス暦から「400年に97回」となるように、当時の教皇グレゴリウス13世によって1582年に変更された暦といわれている。うるう年を入れる規則は次のようになっている。

４の倍数の年をうるう年（366 日）とする。
ただし，100 の倍数の年はうるう年としない。
なお特別に、400 の倍数の年をうるう年とする。

グレゴリオ暦は１年を365.2425日として暦が作成されており、400年に(0.2425×400=)97日短くなっているものをうるう年で修正している。実際の天体観測では１年が365.24219979…日より、その差は0.00030021となる。その逆数をとると3331.00

…となるので、この暦を使い続けたとき、１日分ずれるのは約3331年後になる。

グレゴリオ暦以前に使用されていたユリウス暦は、400年に100回うるう年を入れることから、１年を365.25日としており、その差は0.00780021、逆数をとると128.2016…より、約128年で１日分、1580年間で、12.3日ずれていたことになる。

マヤ文明で使用されていた暦は、365.2420日を１年としていたという説がある。差は0.00019979で､逆数をとると5005.2555…より約5005年後に１日分ずれる。この暦において、うるう年を入れる規則を考えさせた。

現在使用されているグレゴリオ暦について、実際の天体観測値との差である0.2425を分数に直すと、$2425/10000 = 2500/10000 - 100/10000 + 25/10000 = 1/4 - 1/100 + 1/400$ となり,見事に規則が完成する。また､400が4と100の公倍数であることも運用を容易にさせている。さらに､(2)で実施した単位分数分解により､$97/400 = 1/5 + 1/24 + 1/1200$とも表せるので､5・24・1200の倍数の年をうるう年とすればよい。特別に（5と24の最小公倍数である）120の倍数の年には367日、1200の倍数の年は368日となる。同様に､マヤ暦では0.242を分数にして、単位分数の和や差を使って近似するとよい｡(2)と同様に、答えは一意ではない。また、表計算ソフトを利用して、本当にその規則でよいのかを確かめさせた。分解した後の規則は、公倍数を考慮に入れる必要があるので面白い。

(6)　ハノイの塔

３つの棒があり、そのうちの一つに64枚の円盤がさしてある。この円盤は下が大きく，上に行くほど小さくできていて，ピラミッド状に積み上げられている。この円盤を全部、他の棒に移したとき、世界は滅びてしまうという。

最初は模型を利用して簡単な説明を行い、実際に動かしながら回数を調べた。４枚からは難易度が上がり、試行錯誤していた。このとき、一つ少ない円盤の回数を２倍して１を足すことに気づいた生徒がいた。

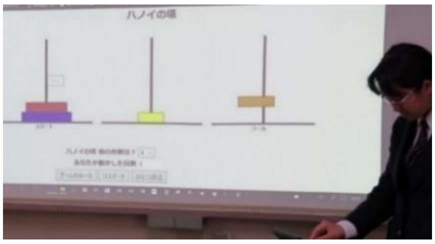
円盤	1	2	3	4
回数	1	3	7	15

$2\cdot 3 + 1$　　$2\cdot 7 + 1$

そこで、次の課題を投げかけた。

①　円盤がn枚のとき，移動回数をnで表せ。
②　n=64のとき，移動回数を求めよ。
③　n=64のとき，１秒間に１枚円盤を移動できたとして、世界が滅びるのは何年後？
④　なぜ、前の回数を２倍して１を足せば求められるのかを説明せよ。
⑤　必勝法（円盤の動かし方の規則性）はないだろうか？

①および⑤については、タブレットを使用して円盤を動かせるようにした。自分で試行した結果を、電子黒板で提示しながら説明させた。実際に動かした手数が表示できるが、Undoは１回なので⑤を考えるように指示した。また、数学Ｂが未習であるため、2^nを考えた数列を提示し、それぞれの項から１を引くと、$2^n - 1$(回)になることを示すだけにした。



②については9200京という概数を求めていた生徒がいた。誤答ではあるが、スーパーコンピュータ「京」についても触れることができた。ちなみに、月へ行ったアポロ宇宙船に搭載されていたコンピュータはファミコンよりも性能が低かったことも紹介したが、生徒たちはファミコンを知らない世代であった。また、普通の電卓は12桁までしか表示できないこともあり、タブレット内の電卓アプリを使用することにした。

③については､１年(365日換算)は31536000秒となるので、$2^{64} - 1$を割ると約5849億年となる。地球誕生から推定46億年であることを鑑みても、大きな数に対する探究心を感じることができる。

④は３本の棒（最初にささっている棒をＡ，移動を補助する棒をＢ、ゴールをＣとおく）のうちＡからＢに(n−1)枚の円盤を移動し､残った一番大きな円盤をＡからＣに移動した後､Ｂにある(n−1)枚の円盤をＣに移動させると考えればよい。

⑤は移す円盤の枚数が奇数か偶数かによって、一番上の円盤を移動させる棒を決めればよい。また、一番上の円盤は順番に動いていることも容易に確かめることができる。

(7)　ベンフォードの法則

nを自然数とする。a^nを計算していったときの最初の桁（１～９の自然数）を調べる。それぞれどのくらいの頻度で現れるか。

物理学者のベンフォードが開発・検証した法則である。ランダムに分布している大量のデータにおいて、各１～９の数字が最初の桁として使用される頻度の分布を考える。検証結果は、先頭の数字を n とするとき，$\log_{10}(1+1/\mathrm{n})$の頻度で現れるという。$\mathrm{n}=1$のとき，$\log_{10}(1+1/1)=\log_{10}2=0.3010$で先頭の桁が 1 である頻度は 30.1%となる。この法則は万能ではないが、不正データのチェックに応用が可能だという。

この法則を検証してみた。まず、生徒に頻度を予想させた。意外にも、「均等に 11.1%ずつ」と答えた生徒は居なかった。

実際に、2^{n}～9^{n}の計算を一人ずつに割り振り、(6)で使用した電卓アプリを利用して、324 乗（事前に表計算ソフトを利用して計算してみると、9^{n}は n=324 で計算不能になった）まで計算させた。その後、先頭の数カウントする際は、データ数が多いため、ペア（数字の読み上げる役と記録する役）に分かれると楽になった。また、標本抽出を試しても面白いかもしれない。

ここで、先頭の数を対数表を利用して求める方法について復習した。2^{64} について常用対数をとると、$64\cdot\log_{10}2=64\cdot0.3010=19.264$より，20 桁の数であること、対数表から $0.264\fallingdotseq\log_{10}1.84$ より $2^{64}\fallingdotseq1.84\times10^{19}$ となり、先頭の数は１であり、(6)の②で求めた答えと一致することを確認した。また、この値を用いると、(6)の③は約 5835 億年となる。

最後に新聞の株価欄を参照し、終値についても同様に調べた。東証一部だけでも、株価の読み上げには 30 分以上かかるので注意が必要である。

結果は下表の通り、出現頻度は％で表している。

最初の桁の数	ﾍﾞﾝﾌｫｰﾄﾞの法則	生徒予想平均	2^{n}～9^{n}平均	東証１部株価終値
1	30.103	21.3	30.1	30.4
2	17.609	18.3	17.6	23.2
3	12.494	9.3	12.3	12.5
4	9.691	10.8	9.9	9.9
5	7.918	8.5	7.8	6.0
6	6.695	9.8	6.8	4.7
7	5.799	7.8	5.9	5.3
8	5.115	9.0	5.0	4.4
9	4.576	5.5	4.5	3.5

株価については、ベンフォードの法則通りになっている結果は得られなかったが、a^{n}については、法則に近い結果が得られた。授業展開によってはネイピア数へつなげることもできるかもしれない。

３　研究のまとめと今後の課題

昨年度に引き続き、教科書は殆ど参照せず、店頭で購入した書籍を参考にして実践した。やはり自分で確認するという作業があった方が生徒の理解や反応が良いように感じた。

生徒からは、「集合が一つ増えるごとに領域が増えて難しかったが、解けたときの達成感はすごい」「エジプト分数はかなり難しかったが、単位分数で表せることを知り感動した」「頭がとても柔らかくなった」「自分でいろいろなやり方を生み出して考えていくのがとても楽しく面白かった」「友達のアイデアを聴くことも新しい発見があり、とてもよかった」「身近にある数学で面白い発想や解法があり、とても興味深く学習することができた」という感想があった。

この研究を行うことで、生徒たちの数学に対する意識だけではなく、自分自身も教科書以外の見方や考え方を習得することができた。また、今回は数学Ⅰおよび数学Ａの範囲に限定しなかったので、連想ゲームの様に次々に課題を提示することができた。特に、(2)と(5)の内容は整数の性質においても活用できるだろう。

課題としては、昨年度に引き続き、時間の確保と題材の選定が挙げられる。１年生の課題学習については、時間が割けず、長期休業中の課題となっている。また、課題を提示し説明することは簡単なのだが、学びが深まる授業展開になるように、提示や展開の工夫が必要であること、実施学年や講座に配慮が必要な課題の取り扱いに留意したい。

次年度は、分野を絞り一貫性のある題材を設定し研究を行いたいと考えている。

≪参考文献≫

・「通勤数学１日１題」　（岡部恒治　亜紀書房）
・「寄り道の多い数学」（大沢健夫　岩波書店）