数学Aにおける課題学習の研究

線分や角の等分を作図・考察する

愛媛県立今治西高等学校　　吉田　英樹

１　はじめに

高等学校における新学習指導要領の実施に伴い,「数学Ⅰ・A」において課題学習の授業実践が進められており，多種多様な指導方法の研究が行われている。

新学習指導要領によると，課題学習は「数学Ⅰ」及び「数学 A」の学習内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにすることを目標としている。また，内容の取り扱いについては，それぞれの内容との関連を踏まえ学習効果を高められるよう適切な時期や場面に実施するとともに，実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとするとしている。従って各学校の実情を踏まえ，生徒たちが関心や意欲を持って自ら課題解決を考えられるような授業展開や身の回りの題材に対し数学を用いて解決する体験的学習活動が授業の中心となるようなものが考えられている。

２　研究の目標

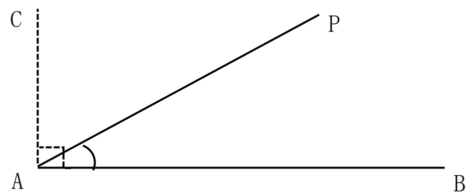
本研究においては,「数学A」の図形の性質，特に平面図形の分野における作図に着目する。作図の分野では，中学校段階で，角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線，円の接線などの基本的な作図方法とその活用が扱われており，高校ではそれらの学習内容を基にして，さらに発展的な作図についての内容や作図方法が正しいことの証明を指導する。そこで本研究では「角の三等分問題」に着目し，等分についての課題学習の指導事例を研究，提案することとした。

３　研究の内容

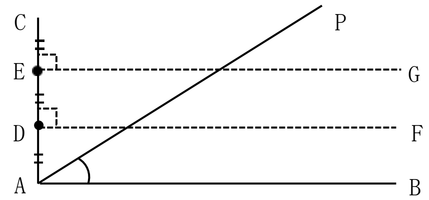
(1)　角の三等分問題についての整理

ギリシャの三大作図問題の中の「与えられた角の三等分の作図」は，定規とコンパスでは不可能であることを Pierre Laurent Wantzel(1837)が証明している。しかしながら古来より（条件を緩めて）角の三等分を作図する様々な手法が考えられている。ここで阿部恒(1980)によって発表された作図手順をまとめる。

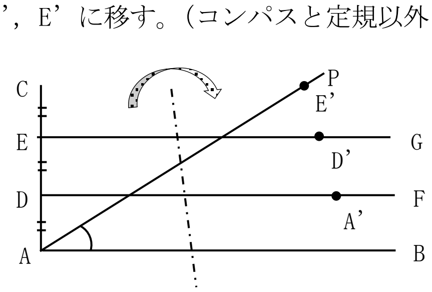
ア　線分ABに対して，垂線ACを引く。



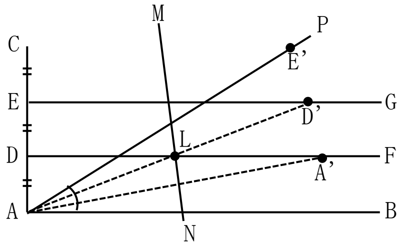
イ　線分ACを三等分する点D，Eをとり，それぞれに垂線DF，EGを引く。



ウ　作図したもの(紙)を，点Aが直線DF上かつ，点Eが半直線AP上に乗るように折り曲げ，点A，D，Eを点A’，D’，E’に移す。(コンパスと定規以外での作図)



エ　折り目を直線MNとし,直線MNと直線DFの交点をLとすると点A,L,D’は同一直線上にあり,2直線AD’, AA’は∠PABを三等分する。



指導事例

テーマ「線分や角を等分してみよう」

［課題１］　線分や角を二等分する

ア　既習内容である，定規とコンパスを用いて線分や角を二等分する手順を確認する。説明としては，以下のひし形の対角線の性質に着目する。

①　対角線がそれぞれの中点で垂直に交わる。

②　対角線は角を二等分する。

※　作図手順については，省略する。

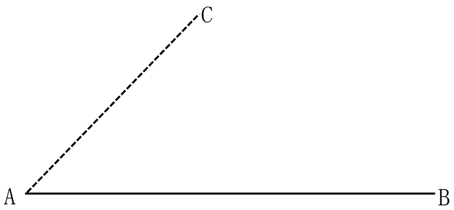
イ　線分や角を二等分できると，四等分や八等分は簡単に考えられることを確認し，さらに作図によって三等分ができるようになると六等分や九等分なども可能になることに気付かせる。

［課題 2］　線分を三等分する方法を考える
（グループワーク）

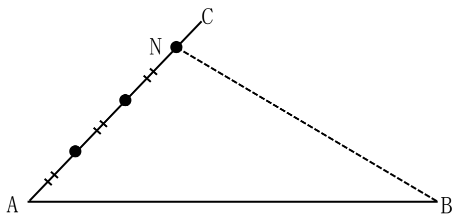
ウ　線分を三等分する方法を各グループで考える。

(例)平行線を用いて線分を三等分する作図手順

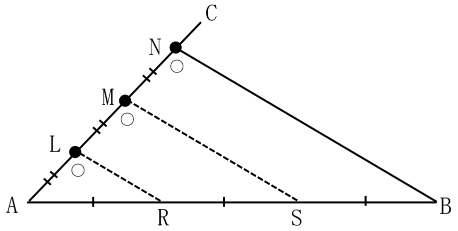
(ｱ)　線分 AB から半直線 AC を引く。



(ｲ)　直線 AC 上に AL=LM=MN となるように点 L,M,N をとり，直線 BN を引く。



(ｳ)　点 L，M を通り，直線 BN に平行な直線と線分 AB との交点をそれぞれ点 R，S とするとこの 2 点は線分 AB を三等分する。



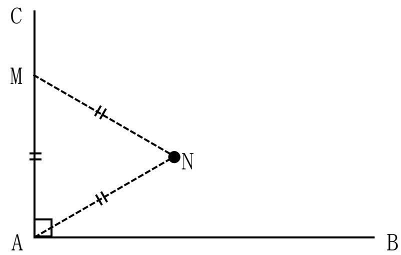
エ　作図例のような三等分の作図手順を用いることにより，線分を n 等分（n =2,3,4,5, ...）することができることも確認しておく。

［課題 3］　角の三等分する方法を考える
その１　直角の三等分（グループワーク）

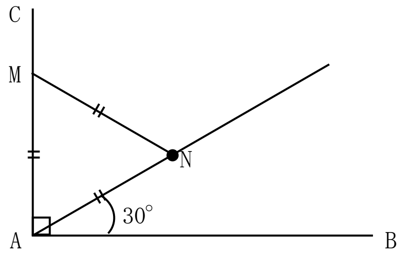
オ　直角を三等分して 30°の角を作る方法を各グループで考える。

（例）直角を三等分する作図手順

(ｱ)　∠BAC=∠R に対して，直線 AC 上に点 M をとり∠BAC 側に AM＝AN＝MN となる点 N をとる。



(ｲ)　ΔAMN は正三角形となることから，∠NAM＝60°である。よって∠BAN=∠R－60°＝30°となる。

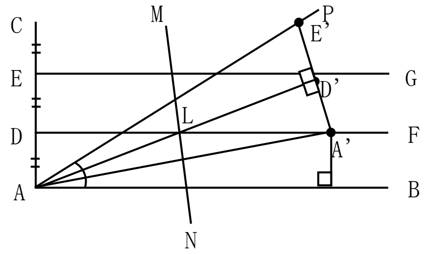


(ｳ)　この作図は 1：2：$\sqrt{3}$の辺の比をもつ直角三角形の性質を用いているため，同じ方法では任意の角を三等分することはできないことを確認する。

その２　任意の角の三等分の作図と証明

カ　作図の手順については，前述の阿部恒の発表したものを説明する。コンパスと定規を用いて作図することを基本とするが，作図した紙を折って点などが別の場所に移すことを認めることについて説明を要する。

キ　証明について



3点A，L，D’が同一直線上にあることを示す。

ΔADLとΔA’D’Lは直線 MN に対して折り返しの関係（鏡映変換）にあることから合同である。

したがって，∠ALD=∠A’LD’

対頂角が等しいことから，3点A，L，D’が同一直線上にある。

ここで，点A’から直線ABに下ろした垂線の足を点Hとすると，

A’H＝AD＝DE＝A’D’＝D’E’　…①

ΔAD’E’とΔAD’A’について

AD’は共通

①より，E’D’＝A’D’

∠E’D’A＝∠A’D’A＝∠R

∴ΔAD’E’≡ΔAD’A’　…②

ΔAD’A’とΔAHA’について

AA’は共通

①より，A’D’＝A’H

∠A’D’A＝∠A’HA＝∠R

∴ΔAD’A’≡ΔAHA’　…③

よって，②，③から

ΔAD’E’≡ΔAD’A’≡ΔAHA’

したがって，

∠E’AD’＝∠A’AD’＝∠A’AH

以上より，2直線AA’，AD’は∠BAPを三等分する。

４　研究の成果と今後の課題

線分や角を等分するという作図の意味を理解することは難しいものではなく，身近な問題ともいえるものの，n等分（n＝2,3,4,5, …）の方法を考えていくことには深みがある。「角の三等分の作図」がコンパスと定規では不可能であることや，作図に用いた「折る」という作業の意味を考えることは「数学Ⅰ・A」の範囲を超えているため扱わなかったが，今回の発展的に数学を学習した際に，あらためて考察することができる授業実践と考えている。数学において身近な作図の問題は，生徒の興味や関心を掻き立てることのできるテーマの一つであるため，別の視点からも研究をしてみたいと考えている。

一方，本研究では授業の指導事例を提案し実践することにより，課題学習の指導事例としての効果を検証しなければならなかった。しかしながら，現在1年生を担当していないという研究者の都合により実践に至ることができなかったため，十分な研究とはいえないと考えている。研究者自身が本研究で提案した事例を実践・検証し，課題学習の一つの指導事例として整理することが今後の課題である。

《参考文献》

・『ドクター・ハルの折り紙教室』(トーマス・ハル著，羽鳥公士郎訳，日本評論社)

・『角の三等分』(矢野健太郎著，創元社)

・『高等学校学習指導要領』(文部科学省)

・『高等学校学習指導要領解説数学編』(文部科学省)

・『数学A』(数研出版)