

# 数学的活動の充実と評価について

## －「正弦定理・余弦定理」の単元における実践－

愛媛県立弓削高等学校 林 俊宏

### 1 はじめに

本実践は平成16年3月国立教育政策研究所から発表された「評価規準の作成、評価方法の工夫改善のための参考資料－評価規準、評価方法等の研究開発（報告）－」に沿った形で、本校の生徒の現状を踏まえながら取り組んだものである。

私が数学的活動の充実を意識するようになって2年になるが、日々の授業で数学的活動の充実のため、実験や作業を取り入れると、その活動に時間を多くとられ、問題演習等の時間が少なくなり、定期考査や模擬試験等、知識や処理を問う場面が多いものに対しては、マイナスの影響を与えているのではないかと思うこともあった。また、「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」に関する評価を十分にしていなかったため、その場限りで終わることが多かった。

しかしながら、数学的活動の充実は特に、「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」に関する生徒の資質を高めるための重要な条件であることはもちろんであるが、継続的に取り組むことにより「表現・処理」「知識・理解」に関する生徒の資質も相乗的に高まるのではないかと考えている。

そこで今年度は、指導する時間が限られた中で問題演習の時間を確保しつつ、特に「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」に関する評価をすることによって数学的活動の充実が図れるのではないかと思い、本実践をすることにした。

以上のことを踏まえて、以下のことに取り組んだ。

- ① 指導目標を明確にした単元の指導計画・評価計画の作成
- ② 指導目標を達成させるための数学的活動の取組とその評価について
- ③ 指導後の指導計画と評価の改善について

①は限られた指導時間で、問題演習の時間を確保しつつ、外的活動を取り入れた数学的活動を行うには、単元の指導計画をきちんと作る必要があり、また、その評価計画を作ることにより、数学的活動の充実が図れるのではないかと思い作成した。②では単元の中で本校の生徒の現状を踏まえ、適度な難易度でスムーズに数学的活動が行われる課題についての考察と評価方法・評価の総括を行った。③では授業後評価をし、指導内容や評価規準の改善点について考察する。

### 2 単元（正弦定理・余弦定理）の指導目標

三角形の辺と角の間に成り立つ基本的な関係として、正弦定理、余弦定理を導き、図形の計量に有用であることを認識させるとともに、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。

### 3 単元（正弦定理・余弦定理）の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
<p>正弦定理・余弦定理が図形の計量の考察に有用であることに気づき、いろいろな場面で活用しようとする。</p> <p>(A 1)</p>	<p>三角形を決定する条件を考察することができる。(B 1)</p> <p>正弦定理・余弦定理を導く過程を考察することができる。(B 2)</p> <p>正弦定理・余弦定理を活用して、辺の長さや角の大きさを求めることができる。(B 3)</p>	<p>三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。</p> <p>(C 1)</p>	<p>正弦定理・余弦定理を三角形の決定条件と関連付けて理解している。</p> <p>(D 1)</p>

### 4 単元（正弦定理・余弦定理）の授業計画（学習活動と評価規準のかかわり）

時間	学習活動	評価規準	評価方法	数学的活動を充実させるための取組
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>○三角形の決定条件について考える。</li> <li>○川幅を測定する方法を考える。</li> <li>○1つの角とその対辺、およ</li> </ul>	<p>B 1</p> <p>A 1</p> <p>B 2</p>	<p>ワークシートにより、三角形の決定条件および正弦定理を導く過程の考察の状況を確認する。</p>	<p>糸で三角形を作ることによって三角形の決定条件について考える活動。(実践例1)</p>

2	<p>び、他の1つの角が分かっているときに、他の辺の長さを求める解法を一般化し、正弦定理を導く。</p> <p>○与えられた条件から正弦定理を用いて辺の長さや角の大きさ、外接円の半径を求める。</p>	C 1	<p>机間指導により解を求めることができるか確認する。</p>	
3 4 5 6	<p>○トンネルの長さを測定する方法を考察する。</p> <p>○2辺とその間の角が与えられたときに、他の辺の長さを求める解法を一般化し、余弦定理を導く。</p> <p>○与えられた条件から余弦定理を用いて、辺の長さや角の大きさを求める。</p> <p>○正弦定理・余弦定理と三角形の決定条件を関連付ける。</p> <p>○三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求める。</p>	A 1 B 2 C 1 D 1 B 3 C 1	<p>ワークシートにより余弦定理を導く過程の考察の状況を確認する。</p> <p>机間指導により解を求めることができるか確認する。</p> <p>「問題作り」をレポートにして提出させ、取組の状況を確認する。</p>	<p>グラウンドに書かれた山の端から端までの距離を測定するために、辺の長さや角度を実際に測定する活動。</p> <p>正弦定理・余弦定理を用いた問題を作らせる活動。</p>

7	○建物の高さを求める課題、	A 1	机間指導や板書させる
8	正四面体の体積を求める課題 に取り組む。	B 3 C 1	ことにより、取組の状 況を確認する。
9	○この単元の内容の演習問題 をする。	C 1 D 1	机間指導や板書させる ことにより、取組の状 況を確認する。

## 5 数学的活動の実践と評価について

### (1) 実践例 1

#### ア 授業展開（1時間目の前半部分）

学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
<p>課題（三角形の決定条件）</p> <p>三角形には3つの辺と3つの角があるが、最低限どの条件があれば三角形が決定されるか糸を用いて調べよ。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ワークシートの利用</li> </ul>
<p>どのような条件があれば三角形は決定されるか分かった人は板書して下さい。</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>糸を用いて調べる方法を例を用いて示し、スムーズに活動が行えるようにする。</li> </ul>
<p>三角形の決定条件</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>1辺とその両端の角が与えられたとき。</li> <li>2辺とその間の角が与えられたとき。</li> <li>3辺が与えられたとき。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>三角形が決定されない場合はその理由を書くよう指示する。</li> </ul>
<p>気が付かなかった条件について確認しよう。</p>	

・糸を用いることにより、決定条件が与えられると三角形は固定されることを実感させる。

## イ 数学的活動に対する評価

上記の数学的活動に対する評価規準 B 1（三角形を決定する条件を考察することができる。）による評価は、配布プリントの表の記入状況によって行う。

### (2) 実践例 2

#### ア 授業展開（3・4時間目）

学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
<p>課題 1</p> <p>山に穴を掘ってトンネルを作りたいが、事前にそのトンネルの長さを測定したい。右図のときトンネルの長さ（A B の長さ）をどのようにして求めればよいか。</p> <p>A B</p>	<p>ワークシートの利用</p>
<p>山の外側に C 地点をとり、三角形 A B C を作ってみよう。</p>	
<p>課題 2</p> <p>別の山では <math>\angle ACB=90^\circ</math> となる C 地点には湖があり、とることができなかった。そのため <math>\angle ACB=60^\circ</math> となる C をとると <math>CB=200\text{m}</math>、<math>AC=100\text{m}</math> であった。このときトンネルの長さ</p>	<p>ワークシートの利用</p>

(ABの長さ)をどのようにして求めればよいか。

A B

100m 60° 200m

C

できるだけ複数の解法で解くように指示する。

∠ACBの大きさが変わっても使える解法はどの解法だろうか。使えない解法はその理由を考えてみよう。

### 課題3

2辺とその間の角を使って、残りの辺の長さを表してみよう。AC=b、BC=a、∠ACB=Cのとき、ABの長さcをa、b、Cを用いて表してみよう。

(解法2)を確認しながら、各自で取り組んでみよう。

課題2を公式にあてはめて、求めた式が正しいかどうか確かめてみよう。

余弦定理をまとめる。

教科書の練習問題をする。

### 課題4

課題1において自由にA地点をとりAC、ABの長さ、∠CABの大きさを測定し、余弦定理を用いてBCの長さを求めよ。


	<p>余弦定理により<math>\angle CAB</math>が<math>90^\circ</math> や <math>60^\circ</math> でなくてもBCの長さを求めることができるというよさを実感させる。</p>
--	--

### イ 数学的活動に対する評価

上記の数学的活動に対する評価規準A 1（余弦定理が図形の計量の考察に有用であることに気づき、いろいろな場面で活用しようとする。）による評価は、課題2の解法を比較する場面および課題4の取組状況により行う。また、評価規準B 2（余弦定理を導く過程を考察することができる。）による評価は課題2の解法を考察する場面で行う。

### (3) 実践例3

#### ア 授業展開（6時間目の後半部分）

学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
<p>○三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求める練習問題をする。</p>	
<p>課題</p> <p style="text-align: center;">  <math>A=45^\circ \quad B=75^\circ \quad C=60^\circ</math> </p>	

である三角形ABCの6つの値からいくつか値を選び、残りの辺の長さや角の大きさを求める問題を作り解こう。

三角形の決定条件が与えられれば、三角形が決定されることに留意させる。

## イ 数学的活動に対する評価

上記の数学的活動に対する評価規準B3（三角形の与えられた辺の長さや角の大きさから、正弦定理・余弦定理を用いて、残りの辺の長さや角の大きさを求める。）による評価は、問題設定およびその解法の考察の状況によって評価する。

## 6 観点別評価の総括

- (1) 「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」に関する評価は主に、課題やワークシートの取組状況をもとに行い、各単元ごとにA, B, Cの三段階で数値化し、総括したものを平常点とする。
- (2) 「表現・処理」「知識・理解」については主に授業中の机間指導によって評価し、生徒への指導に生かすが、その取組状況を授業中に正確に判断することは難しく、また評価と指導を同時に行うと煩雑になるおそれがあるので、その評価を評点に反映させることはせず、定期考査でまとめて評価を行うものとする。
- (3) 100点法による評価は平常点を約2割、定期考査の得点を8割として評価する。

## 7 指導計画と評価の改善

### (1) 実践例1

#### ア 概況

三角形の決定条件を考察する活動を行った。2人組で糸を張って辺や角を固定して、どのような条件があれば、三角形が動かないか（決定されるか）考察した。どの生徒もまじめに取り組んでいたが、糸で考えるので、長さは固定できるが、角度は固定することがやや難しいので、スムーズに活動を行えないグループが多少いた。





(糸を用いて三角形の決定条件を考えている様子)

## イ 生徒の感想

- ひもで調べていくうちに、中学校で習った三角形の合同条件と同じだったのでびっくりした。実際にひもを使って考えると、頭で考えるよりも分かりやすいと思った。
- 今回の授業で「覚えた」じゃなく「理解した」とはっきり言えるようになった。
- 作業の方法がよく分からず、十分にはできなかったけど、決定条件を糸で確認したときには、「なるほどな」と思った。
- 角を3つ固定すると三角形は決定されると思ったが、拡大したものや、縮小したものがあると分かったときは、「あっそうか」と思った。
- 2つの辺と1つの角を固定したとき、その1つの角が2辺の間の角でなくても、三角形は固定できると思う。

## ウ 指導計画と評価の改善

### (7) 指導計画の改善

三角形の決定条件を考えさせることがねらいであったが、ワークシートでは固定する辺と角の数を変えることにより作業をさせていたので例えば2つの辺と1つの角を固定したとき、2辺とその間の角でなくても三角形は固定でき、三角形の決定条件を印象付けるにはやや不適切であった。正弦定理・余弦定理を学習後、他の条件のときも三角形の決定条件に帰着できることを、説明する必要があると感じた。また三角形の決定条件を考えるときに、いきなり作業に入るのではなく、「三角形の分かっている辺の長さや角の大きさをもとにして、他の辺の長さや角の大きさを求めたいが、そのためにはまず三角形が

決定されなければ、求めることができない。」ということを十分に説明したいと思う。

計画ではこの活動は25分で終わる予定であったが、35分かかり、その次に続く正弦定理の導入部分を、十分に行うことができなかった。これは生徒に活動させる前の事前の説明が不十分であったため、どのように糸を使って考えていくのか生徒が理解するまでに必要以上に時間がかかってしまったことにある。次回は事前の説明を十分に行いたい。

#### (1) 評価の改善

評価規準B1に対する評価基準は次のように定めた。

A・・・3つ以上について調べている。

B・・・1つ以上について調べている。

C・・・調べることができなかった。

15名中Aが9人、Bが6人、Cが0名であった。以上から難易度については、適当であったと考える。

#### (2) 実践例2

##### ア 概況

課題1に対して、次の4通りの方法が考え出された。

解1) 山の外に点Cを

$AC=BC$ かつ $\angle ACB=60^\circ$

となるようにとると、 $\triangle ABC$ は正三角形になるので、 $AC=AB$ となり、ACの長さを測ればそれがABの長さとなる。

解2) 山の外に、点C、Dを

$AC=BD$ 、 $\angle ACD=90^\circ$ 、 $\angle BDC=90^\circ$

となるようにとる。四角形ABCDは長方形になるので $CD=AB$ となる。よってCDの長さを測れば、それがABの長さになる。

解3) 山の外に点Cをとり $\angle A$ と $\angle C$ の大きさと辺BCの長さを測定すれば、正弦定理より

$AB/\sin C=CB/\sin A$

として求めることができる。

解4) 山の外に

$\angle BAC=60^\circ$ 、 $\angle ABC=30^\circ$ 、 $\angle ACB=90^\circ$

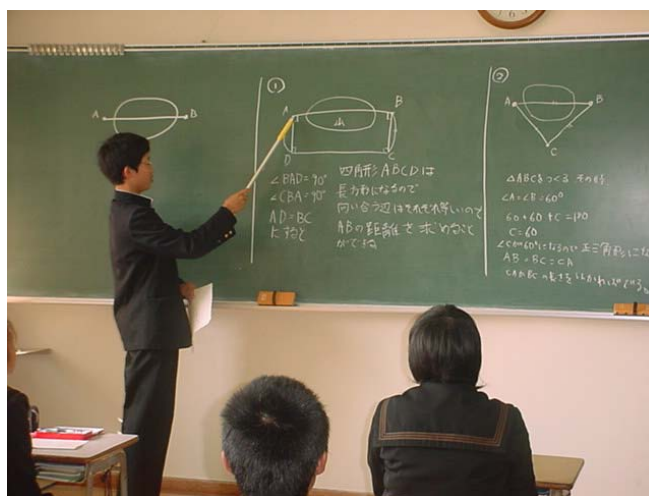
となるようにとると、 $AC:AB=1:2$ よりACの長さを測定し、それを2倍すればABの長さを求めることができる。

屋外での活動であったので、生徒は生き生きと自由な発想で解法を考えることができた。



(グラウンドでの測定の様子)

次の時間に4つの解法について発表を行い、各解法について、考察を行った。解1)解2)解4)については、角度や辺の長さが固定されるため、障害物等があったときには測れないという意見が多く出た。



(解法の発表の様子)

## イ 生徒の感想

- 数学の公式と知識を使えば、直接測ることが難しいものでも、測れないこともないんだなと思いました。
- 自分の言いたいことがうまく説明できなかったけど、焦らずじっくり考え、ゆっくりと説明するように工夫した。
- 解法を思いつくまでにかかなり時間がかかった。でも思いついたときは嬉しかった。皆が作った色々な解き方はとても勉強になった。本当にトンネルの長さを調べるときは、どのようにしているのか

知りたい。

- 最初に思いついた方法は山の中に辺が入ってしまいできませんでした。実際には障害物などがあるので、測定するのは難しいと思った。
- 答えを聞くと分かることも、自分で考えようとすると、とても難しいと思いました。
- 余弦定理を使う方法は $\angle ACB$ の大きさを自由に決められるので、障害物等に邪魔されないところがすばいと思った。

## ウ 指導計画と評価の改善

### (7) 指導計画の改善

課題1の中から課題2と同様な解法（解4）が生徒から導き出されたので、課題2として生徒に考えさせるのではなく解4について $\angle ACB=90^\circ$ でなくても、辺ABの長さを求められる方法を考えさせた。しかしながら、余弦定理を生徒から導き出させることは大変難しく、教員が導き方を説明することで終わってしまった。A講座では導き方については、教員が主に説明し生徒に理解させる方法がよいと感じた。余弦定理・正弦定理を学習した後に、課題1について取り組むという流れもあると感じた。

余弦定理を用いて課題1についても一度取り組むという流れは、角度を固定しなくても、余弦定理であれば辺の長さを求めることができるという点を強調できるので非常に良かったと思う。

### (1) 評価の改善

評価規準B2に対する評価は、上記に挙げたように、教員が導き方を説明することで終わったため、できなかった。評価方法がワークシートで導く過程の考察の状況の確認を行うとあったが、このような状況であったので、記入状況を確認するという記述で、とどめておいた方がよいと感じた。

評価規準A1については課題2を考えなかったので、課題1および課題4への取組状況で判断した。評価基準は次のように定めた。

A・・・課題1、課題4ともに解法を書いている。

B・・・どちらか一方には解法を書いている。

C・・・両方解法が書かれていない。

15名中Aが13名、Bが2名、Cが0名であった。以上のことから、難易度については適切であったと考える。

### (3) 実践例3

#### ア 指導計画と評価の改善

課題レポートを提出させた。問題作成の状況は良好であったが、その作成した問題の解答状況はあまり良くなかった。残りの辺と角をどの順番で求めるのか、十分に理解していなかったためだと思われる。このことから、例題を示し解かせる場合に、正弦定理・余弦定理と三角形の決定条件について、より丁寧に指導する必要があると思われる。また課題レポートの出題の意図を十分に説明する必要があると感じた。

#### イ 評価の改善

評価規準B3に対する評価基準は次のように定めた。

A・・・問題設定および解法について正しく考えることができる。

B・・・問題設定ができる。

C・・・問題設定ができていない。

15名中Aが4名、Bが9名、Cが2名であった。生徒にとっては難しかったように思われるが、これは上記に挙げたように指導を見直せば、改善されると思われる。

## 8 研究のまとめと今後の課題

一昨年から数学的活動の充実を意識するようになったが、毎回の授業で、実験や作業を取り入れ生徒の気づきを課題にする授業はできず、大半は定期考査のために例題を示し、練習問題を解くという授業で、実験や作業を取り入れた授業は単発的に行う程度であった。実験や作業を単発的に行っても、本校の生徒はそれなりに一生懸命取り組んでくれるが、そこで得たものを後に十分に生かしていないという状況であった。これは数学的活動は主に「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」を育てる活動であり、これらの観点をきちんと評価していなかったため、教員がいくら数学的活動の大切さを説明しても、生徒には定着してゆかなかったからだと思う。

今回の取組では主に「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」に関する評価をすることで、2つの観点を育てることの大切さを意識付けるとともに、評価項目を示すことにより、目標を明確にさせ、主体的な取組させることによって数学的活動の充実を図ろうとした。以下、今回の取組で感じたことを箇条書きで表す。

## (1) 数学的活動を充実させることについて

### ア 生徒にとって

- 発表の機会をもつことによって、自分の言葉でできる限り分かりやすく友達に説明しようとする姿勢がみられた。
- 解法が1つではないので、解法を比較することで友達から認められることの喜びを共有し、また、他の生徒の考え方の良さに気づくことができた。
- 作業で得られた数値は、自分が苦勞して得た数値である。そのため、その数値を利用して得た解答は自分自身のものとして大切にする。

### イ 教師にとって

- 生徒の気付きを課題にしていくので非常に時間がかかる。また、難しすぎると、活動を全く行えない生徒が出てくるおそれがある。そのためにも、評価と指導計画を充実させることが重要になってくると思われる。
- 「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」に関する評価は、ワークシートやレポート提出によって行うと正確に行えると思われるが、毎回の授業ごとに提出させたのでは、事務処理が非常に煩雑になるので、小単元または単元ごとに提出させることが現実的だと思われる。
- 数学の授業において、演習する時間を確保することは非常に大切なことであるが、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度をさらに育てるには、時間はかかるけれども、単元の中心的な場面において作業や実験、発表などを取り入れた数学的活動を行う必要があると感じた。

## (2) 評価を生かすことについて

- 評価をするということは、その項目を教師が大切にしているということである。そのことが生徒に伝わり、真剣に取り組ませることができるのではないか。
- ペーパーテストは苦手だが、独創的な考え方をもっている生徒など、様々な生徒を評価することができ、自信を付けさせることができるのではないか。
- 生徒の状態を詳しく知ることができ、教材の選択、授業の進め方等において参考になる。生徒の考

え方を生かした授業ができるのではないか。

### (3) 今後の課題について

- 単元の中心的な場面で、生徒にとって適切な難度であり、また、実験や作業を伴った数学的活動が行える教材の開発。
- 主に「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」を評価する評価問題の作成。

### 《参考文献》

- [1] 『評価規準の作成、評価方法の工夫改善のための参考資料－評価規準、評価方法等の研究開発（報告）－』平成16年3月編集 国立教育政策研究所
- [2] 吉田明史『創造性の基礎を培う数学的活動実践事例集<数学基礎・数学Ⅰ・数学A>』学校図書
- [3] 吉田明史・飯高茂『高等学校学習指導要領の展開』明治図書
- [4] 『愛媛県県立学校評価の手引き』平成15年3月編集 愛媛県教育委員会
- [5] 大矢雅則・岡部恒治ほか14名『新編 数学Ⅰ』数研出版
- [6] 『教科の学習指導における評価の在り方に関する研究 数学科』鹿児島県総合教育センター 研究紀要第102号
- [7] 藤本義明『新学習指導要領の実施に向けて』愛媛県高等学校教育研究会 数学部会誌,42,6-7(2001)
- [8] 長尾篤志『授業改善と評価』愛媛県高等学校教育研究会 数学部会誌,43,2-10(2002)