「数学的活動」を促す教材開発
－内積の定義を図形的に理解する－

愛媛県立今治北高等学校　林　俊宏

1　はじめに

ベクトルを指導する際に，生徒たちはベクトルの加法・減法・実数倍については，ベクトルを，有向線分の位置の違いを無視して，その向きと大きさだけに着目したものという定義から，平行四辺形を使ってベクトルの和を表すなど，図示することができるので納得しているようだが,内積については定義が与えられて，しばらく問題演習をする中で，その有用性は感じているが，求めた内積の値そのものに何の意味があるのか疑問に思うなど，十分に納得していない，ということを感じる。そこで，内積の定義について図形的に解釈させることを通して納得させたいと思い，本主題を設定した。

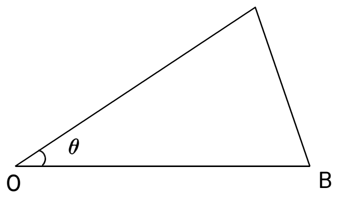
2　数学的活動との関係

本教材では内積の定義を導入する際に，既に学習している余弦定理と関連付け，さらに内積の図形的解釈を余弦定理に応用することにより，余弦定理の内容を図形的に理解させることを通して，その有用性を感じさせるなど，設定した数学的な課題を既習事項や公理等を基にして数学的に考察・処理し，その課程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し，数学的知識を構成する数学的活動が行われることを想定している。

3　研究の内容

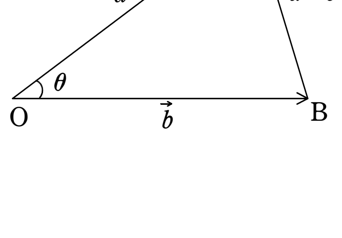
(1)　余弦定理による内積の定義の導入

まず下図において余弦定理を確認する。



$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta$$

次にベクトル表記で表す。



$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \cdots ①$$

（発問）

ベクトルの新しい演算

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

をどのように定義すれば①は自然な表記になるか考えよ。

実数a,bに対して $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

が成り立つことを参考にせよ。

（考察）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \cdots ②$$

とおくと

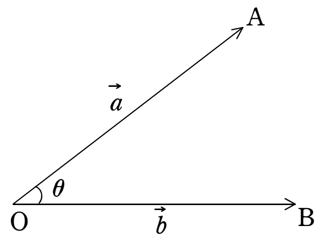
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

となり、自然な表記となる。

(2)　内積の図形的解釈

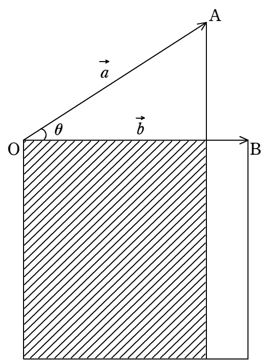
（発問）

②の式は何を表しているのか下の図に図示せよ。

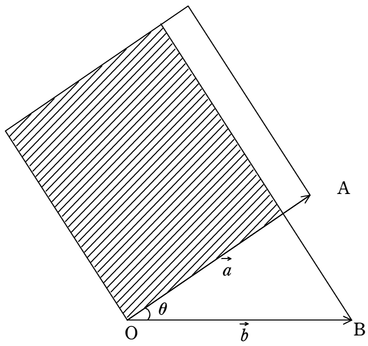


（考察）

下図の斜線部を表す。



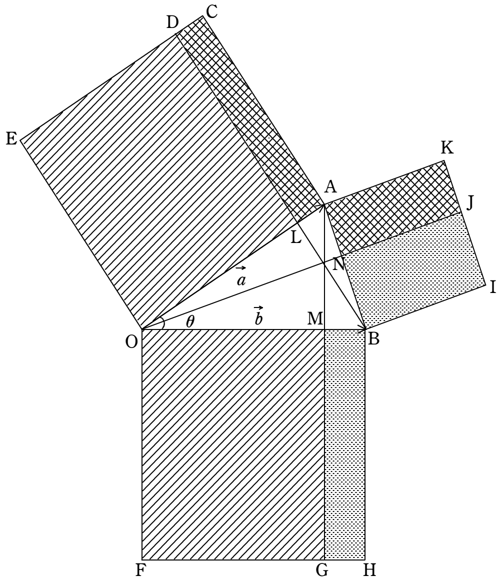
または，



(3)　内積の図形的解釈の余弦定理への応用

（発問）

ベクトル表記での余弦定理が成り立つことを下の図で確認せよ。



図③

（考察）

上図の面積について

長方形 ACDL ＝長方形 ANJK,

長方形 BMGH ＝長方形 BIJN

が成り立つので,

正方形 ABIK ＝正方形 OACE ＋正方形 OFHB

一（長方形 OLDE ＋長方形 OFGM）

したがって

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

が成立。

(4)　評価問題

内積の学習が一通り終わった時点で、内積の図形的解釈を深めさせるため，次のような評価問題を解かせた。

ア　$\vec{a} \perp \vec{b} \Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$　であるが，これを内積の図形的解釈（③の図）から説明せよ.

イ　$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$　であるが，これを内積の図形的解釈（③の図）から説明せよ.

ウ　$|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a}$と$\vec{b}$のなす角$\theta$が$60°$のとき $|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を内積を用いないで求めよ。

（考察）

評価問題ア，イについては③の図においてなす角をそれぞれ，90°と0°にすれば容易に導かれる。評価問題ウについては，作図し余弦定理を用いれば解けるが，内積を用いれば形式的に解けることの良さを感じることができるのではないかと思う。

4　まとめと今後の課題

今回の取組は，２年生理系の生徒数名に対して実験的に行ったものである。余弦定理から内積を導入する方法については，スムーズに理解できたようである。

内積の図形的解釈については内積が面積として表されるので理解が深まったようであるが，２つのベクトルの一方から他方への正射影を考えなければならないので，理解をさせるのに時間がかかった。また内積の図形的解釈の余弦定理への応用では，等積変形の考え方が必要なため、理解が難しいようだったが、等積変形を説明するアニメーションを示すと，理解したようであった。評価問題についてはヒントを与えたので、全員が解答することができた。

今後の課題はベクトルは数学Ｂの指導内容であり、通常２単位で教えている。それゆえ，演習時間に制限があることと，次の授業までの間隔が長いので、あまり多くの時間をこの取組にかけることはできないということである。したがって，証明はアニメーションを用いて，納得させる形で終わらせるなど、証明そのものに重きをおくのではなく、内積の理解を深めることに重点をおくなど、時間があまりかからない指導計画を立てることである。

《参考文献》

［1］吉田明史『創造性の基礎を培う数学的活動実践事例集＜数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ｂ・数学Ｃ＞』学校図書

［2］吉田明史『創造性の基礎を培う数学的活動実践事例集＜数学基礎・数学Ⅰ・数学Ａ＞』学校図書