# 「積分法の応用」の指導法について

愛媛県立川之石高等学校　小池　長八郎

## 1　はじめに

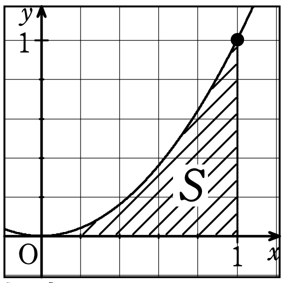
前回は、２次曲線の指導法について実験や教具等を用いて指導したが、今回は数学IIIの「積分法の応用」の指導法を考えた。この中でも特に定積分と面積の関係は、数学IIにおいて習った内容であるが、理解することが難しい概念である。そこで教具を用いて、積分と面積の関係について確認しながら理解を深めるとともに、積分と体積の関係についてイメージを広げることができればと思い、この主題を設定した。

## 2　研究の内容

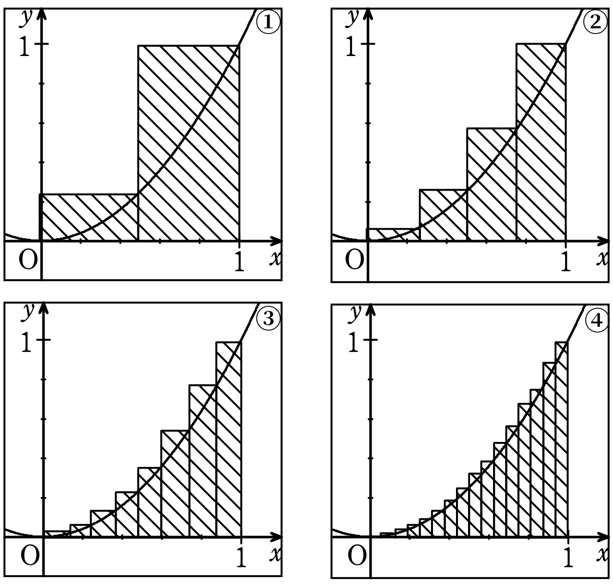
①　放物線 $y=x^2$，$x$ 軸，直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積を考える。

$$S=\int_0^1 x^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

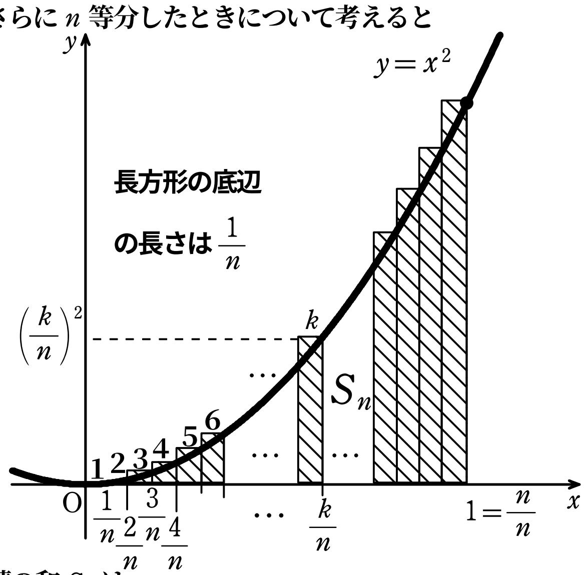



次に，長方形に分割して面積を考える



| 番号 | ① | ② | ③ | ④ |
|---|---|---|---|---|
| 四角形の数 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| 長方形の面積の和 | | | | |

さらに $n$ 等分したときについて考えると




面積の和 $S_n$ は

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

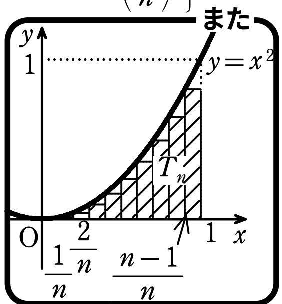
であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}$$

よって，$\lim_{n\to\infty}S_n=S$ が成り立つ

また

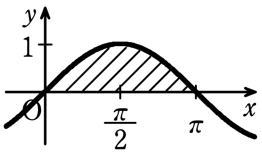



$\lim_{n\to\infty}T_n=S$ も成り立つ

（最小和）

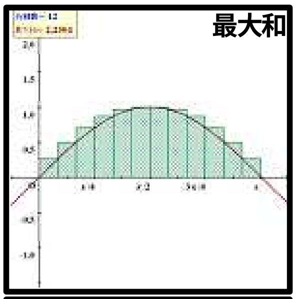
②　function　viewを用いて，放物線に限らず曲線に囲まれた部分の面積が長方形の和で近似できることを説明した。このとき，最大和，最小和のほかに台形和などいろいろなタイプの分割について紹介し，どの場合においても，分割を限りなく細かくしていけば曲線で囲まれる部分の面積に近似できることを説明した。

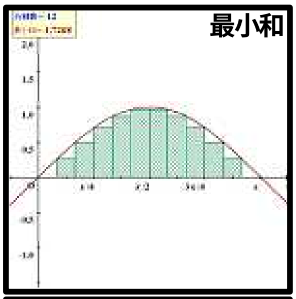
例　$y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$と
　$x$軸で囲まれる図形の面積
　定積分で求めると

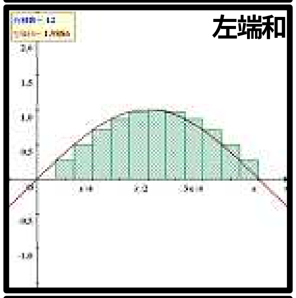


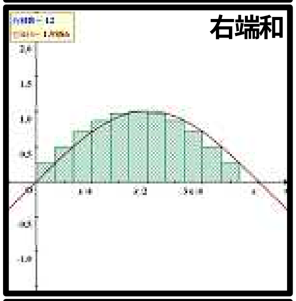

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \Big[ -\cos x \Big]_0^{\pi} = -(-1)-(-1)=2$$

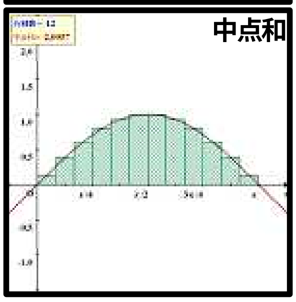
function view の画像

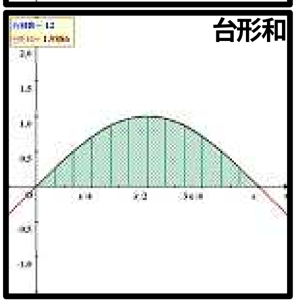



③　定積分を使って面積が求められることを確認して，
　区分求積法について説明する。

斜線部の面積 $S_n$ は

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots\cdots + f(x_n)\Delta x$$

$n \to \infty$ のとき　$S_n \to S$となるから

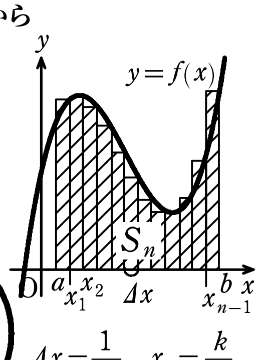
次のことが成り立つ

**区分求積法と定積分**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

ただし　$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$，

$$x_k = a + k\Delta x$$




特に，$a=1$，$b=0$ とすると

$\Delta x = \dfrac{1}{n}$，$x_k = \dfrac{k}{n}$

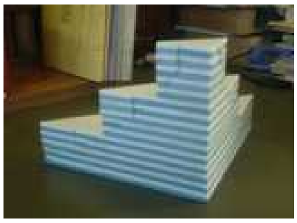
より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

④　面積の考えを拡張させて，体積について教具を用
　いて説明する。

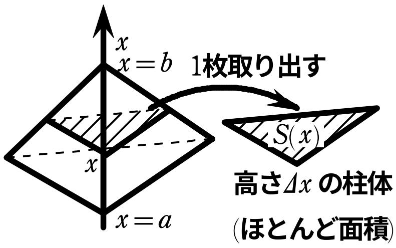
面積→「長方形」に分割

体積→「柱体」で分割
　　　　を考える

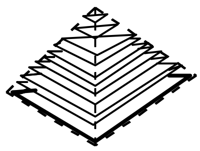


分割数を増やしていくと
　１つ１つの直方体は
ペラペラの薄い断片になり
それらの合計はもともとの
立体の体積に限りなく近づく

積分で考えると




高さ$\Delta x$の柱体
(ほとんど面積)



これらをたくさん
積み上げると…

まず，座標軸を導入して，$a \leqq x \leqq b$ を$n$ 等分する
その分点の座標を，$a$ に近いほうから順番に
　$x_1$，$x_2$，……，$x_{n-1}$とする。また，$a=x_0$，$b=x_n$
次に，各分点を通り$x$軸に平行な平面でこの立体を
分割すると，このとき

$$V_n = S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \cdots\cdots + S(x_n)\Delta x$$

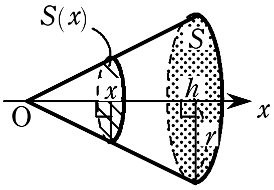
$$= \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$　　面積のときと同じ

とすると，$n \to \infty$ のとき，
$V_n$はもとの立体の体積$V$に限りなく近づく。
したがって

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)dx$$

が成り立つ。

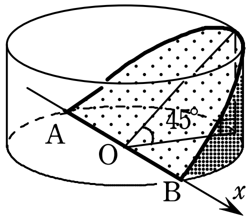
⑤　直円錐の体積を考え，積分から求めることができることを説明した。




⑥　断面積による立体の体積の計算については，イメージがつかみやすいように模型などを用意して説明した。

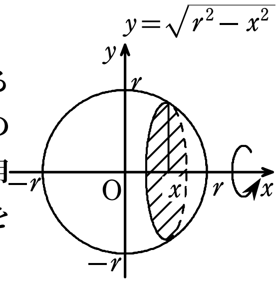
**教科書p160練習38**

底面の半径が $a$ で高さも $a$ である直円柱がある。この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を2つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。




⑦　回転体の体積について

断面が半径 $|f(x)|$ の円であることを確認しながら，球体の体積を例に出し，定積分を用いて体積を求められることを説明した。




また，2曲線間の回転体の体積の問題では，円環体（トーラス）の体積を積分で求めた後，この体積が円の中心が描く曲線の長さ $2\pi a$ と円の面積 $\pi r^2$ の積（円柱の体積）に等しいことをソーセージを用いて説明した。（パップス·ギュルダンの定理）

## 3　研究のまとめと今後の課題

生徒は、 定積分を用いて面積や体積を求めることができることに、関心を深めることができたようである。導入の面積の細分化では、パソコンで様々なパターンについて紹介することができ、教具としては最適であったと思う。また、体積については、実物を見せることで断面積を容易にイメージすることができ、作った甲斐があった。課題としては、面積の導入で時間を掛けてしまい、演習の時間が少なくなってしまった。また、今回はどちらかというと教員主体の見せるだけの授業となってしまったことである。生徒の興味·関心を引きつつ、作業を取り入れながら問題演習の時間を確保できるようバランスを考えて指導していきたい。

### 参考文献


- 『新編　数学 III』
  大矢　雅則·岡部　恒治　ほか12名著
  数研出版（平成16年検定済）
- 『ためして作って納得数学　第２集』
  秋山　仁　ほか6名著
  数研出版（平成11年11月発行）