

数学へのやさしいアプローチについて (例 7)

愛媛県立松山北高等学校

田 中

徹

1 はじめに

2年前から転勤で進学校に勤務しているが、学習意欲の高い生徒が多く、数学の学習に対する意識も強い。しかし、中学校時代では数学は不得意ではなかったのに、高校生になってから中学校より速い授業の進度や内容の難しさから、苦手になりつつある生徒も多い。ある先輩の先生方から、「数学ができないと言われると、バカにされた気がする」という生徒の話聞いたことがある。学習に対するプライドの高い生徒に対して、数学が苦手になるということは自分で自分を嫌いになることになりかねない。

そこで、「どのように楽しく、分かりやすく、数学を生徒に学習させていくのかは、数学教員の大きな責任である」と常に感じている私にとって、生徒たちが数学を嫌にならない教科指導方法を研究し、さらに大学入試問題等の応用問題にも対応できる学力向上の源を生徒に築きたい。ゆえに、昨年に引き続き、この主題を設定した。

2 研究内容

事例は「図形のベクトル方程式」である。これは、前々任校の進学校の生徒にとって、「教えてもらったときは、何となく分かるところ」であり、時がたつにつれて、分かりにくくなる場所であった。それはなぜだろうか。3年前に、ある学校訪問における「図形のベクトル方程式」の参観授業でも、指導の先生方は悪戦苦闘していた。もちろん、自分自身も教えるときは同様である。指導する側の姿勢がどうなのかは、生徒を分かりにくくさせるかどうかを左右している。今回は前々任校でのリベンジの意味も含め、指導方法の研究をした。

ベクトルは大きさだけでなく、向きも考えるという、生徒にとっては今までにない新しい概念とベクトルの記法が生徒の理解を困難にさせる要因である。これを、生徒にどのようにシンプルに感じさせるかが教える側のポイントであろう。

そこで、解答例をどのように示していくかを考えた。その事例と生徒たちの考査における解答は以下の通りである。

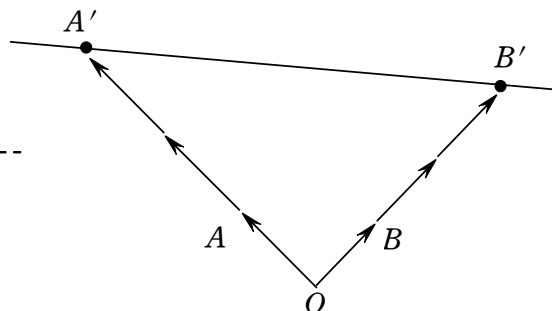
異なる2点 A, B がある。点 P に対し、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ (s, t は実数) と表されるとき、次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $s + t = 3$

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{3} = 1 \text{ より、}$$

$$\overrightarrow{OP} = \triangle \times 3\overrightarrow{OA} + \square \times 3\overrightarrow{OB}, \triangle + \square = 1$$

$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$ とすると、
点 P は直線 $A'B'$ 上にある。

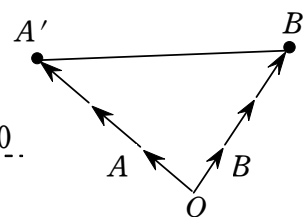


(2) $s + t = 3, s \geq 0, t \geq 0$

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{3} = 1 \text{ より、}$$

$$\overrightarrow{OP} = \triangle \times 3\overrightarrow{OA} + \square \times 3\overrightarrow{OB}, \triangle + \square = 1, \triangle \geq 0, \square \geq 0$$

$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$ とすると、
点 P は線分 $A'B'$ 上にある。



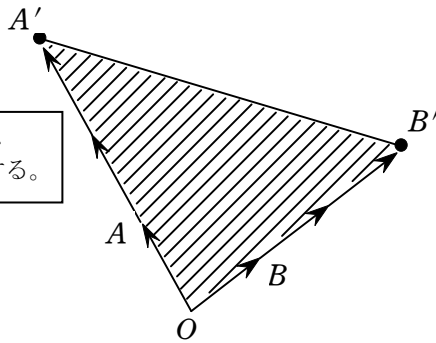
(3) $s + t \leq 3, s \geq 0, t \geq 0$

$\frac{s}{3} + \frac{t}{3} \leq 1$ より、

$\vec{OP} = \Delta \times 3\vec{OA} + \square \times 3\vec{OB}, \Delta + \square \leq 1, \Delta \geq 0, \square \geq 0$

本校生徒の暗算力を活かせば、この点線部分だけを記入して、すぐに解答することができる。

Δ, \square を用いることによって、 A' と B' の位置を見やすくする。



$\vec{OA'} = 3\vec{OA}, \vec{OB'} = 3\vec{OB}$ とすると、点Pは $\triangle OA'B'$ の周および内部にある。

生徒の定期考査問題の解答例

$\triangle OAB$ に対して、次の条件を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, s + t = \frac{1}{2}, s \geq 0, t \geq 0$

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + 3t\vec{OB}, s + t = 1, s \geq 0, t \geq 0$

(3) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, s + t \leq 2, s \geq 0, t \geq 0$

(1) → 生徒の正答率
100%(88人中88人)

(2) → 生徒の正答率
86.4%(76人中88人)

(3) → 生徒の正答率
98.9%(87人中88人)

② 次の間に答えよ。
 $\triangle OAB$ に対して、次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $s+t = \frac{1}{2}$

$s+t = \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OP}$

$\vec{OP} = \square \times \frac{1}{2}\vec{OA} + \square \times \frac{1}{2}\vec{OB}$

$\square + \square = 1$

$\frac{1}{2}\vec{OA} = \vec{OA}'$, $\frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は直線 $A'B'$ 上にあり

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + 3t\vec{OB}$, $s+t=1$, $s \geq 0, t \geq 0$

$s+t=1$ より $\vec{OP} = \square \times \vec{OA} + \square \times 3\vec{OB}$, $\square + \square = 1$, $\square \geq 0, \square \geq 0$

$3\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は線分 AB' 上にあり

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $s+t \leq 2$, $s \geq 0, t \geq 0$

$s+t \leq 2$ より $\frac{1}{2}(s+t) \leq 1$

$\vec{OP} = \square \times 2\vec{OA} + \square \times 2\vec{OB}$, $\square + \square \leq 1$, $\square \geq 0, \square \geq 0$

$2\vec{OA} = \vec{OA}'$, $2\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は $\triangle OA'B'$ の内部および周上にあり

② 次の間に答えよ。
 $\triangle OAB$ に対して、次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $s+t = \frac{1}{2}$

$s+t = \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OP}$

$\vec{OP} = \square \times \frac{\vec{OA}}{2} + \square \times \frac{\vec{OB}}{2}$, $\square + \square = 1$

$\frac{\vec{OA}}{2} = \vec{OA}'$, $\frac{\vec{OB}}{2} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は直線 $A'B'$ 上にあり

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + 3t\vec{OB}$, $s+t=1$, $s \geq 0, t \geq 0$

$s+t=1$ より $\vec{OP} = \square \times \vec{OA} + \square \times 3\vec{OB}$, $\square + \square = 1$, $\square \geq 0, \square \geq 0$

$3\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は線分 AB' 上にあり

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $s+t \leq 2$, $s \geq 0, t \geq 0$

$s+t \leq 2$ より $\frac{1}{2}(s+t) \leq 1$

$\vec{OP} = \square \times 2\vec{OA} + \square \times 2\vec{OB}$, $\square + \square \leq 1$, $\square \geq 0, \square \geq 0$

$2\vec{OA} = \vec{OA}'$, $2\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は $\triangle OA'B'$ の内部および周上にあり

② 次の間に答えよ。
 $\triangle OAB$ に対して、次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $s+t = \frac{1}{2}$

$s+t = \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OP}$

$\vec{OP} = \square \times \frac{1}{2}\vec{OA} + \square \times \frac{1}{2}\vec{OB}$, $\square + \square = 1$

$\frac{1}{2}\vec{OA} = \vec{OA}'$, $\frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は直線 $A'B'$ 上にあり

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + 3t\vec{OB}$, $s+t=1$, $s \geq 0, t \geq 0$

$s+t=1$ より $\vec{OP} = \square \times \vec{OA} + \square \times 3\vec{OB}$, $\square + \square = 1$, $\square \geq 0, \square \geq 0$

$3\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は線分 AB' 上にあり

(2) $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $s+t \leq 2$, $s \geq 0, t \geq 0$

$s+t \leq 2$ より $\frac{1}{2}(s+t) \leq 1$

$\vec{OP} = \square \times 2\vec{OA} + \square \times 2\vec{OB}$, $\square + \square \leq 1$, $\square \geq 0, \square \geq 0$

$2\vec{OA} = \vec{OA}'$, $2\vec{OB} = \vec{OB}'$ とおくと、
 \vec{OP} は $\triangle OA'B'$ の内部および周上にあり

3 まとめと今後の課題

定期考査の結果は上々であり、普通の習熟度であるクラスの方が選抜クラスより好結果が出たこともうれしい誤算であった。しかし、これはパターンのある、公式的に解答していく問題である。確かに、生徒はベクトルの記法に惑わされずに、恐れずに解けるようになったが、ベクトルを用いて多種多様な図形を解釈していく学力はさほど身に付いていないと思う。最初の一步は進んだが、そこから数学の応用力につながる学習能力を身に付けさせる指導に努めていきたい。

また、生徒にとって、数学の授業内容は点数を採るためのものであり、まだまだ私の努力不足のため、本当に数学を楽しく学習させているとはいえない。少しでも生徒に数学への興味と探求心を高めて、学習をサポートするとともに、難問にもチャレンジしようとする姿勢を持たせる、実りのある数学の授業ができるように精進し続けていきたい。