

# 「数学的活動」を促す教材開発

## －教科書に掲載されている話題の活用－

愛媛県立今治北高等学校 林 俊宏

### 1 はじめに

章末ごとに、学習内容に関連した興味深い話題を掲載している教科書が多いが、私は授業で紹介する程度で、深く扱うことはなかった。しかし、話題の中には、数学的活動を促すことが期待される題材が多くあり、活用しようと考えた。また、教科書に掲載されている内容であり、新しく準備することが少なく、生徒全員が持っているので扱い易いというメリットもあると考えた。授業で話題を紹介し、レポートにして提出させ、ノート点などの平常点として評価する方法が考えられる。話題を紹介する際に、補助プリントを使い、数学的活動がスムーズに行われるよう配慮することが大切である。

### 2 数学的活動との関係

生徒がレポートを作成する際に、以下の2点の活動を行うことができるよう補助プリントを作成した。

- (1) 見出した数学的知識の意味を身近な事象に戻って味わったり、いろいろな場面で活用する。
- (2) 問題解決の方法を味わったり、自ら思考過程を振り返ったり、発展的に考えたりなど、数学的考察・処理の質を高める。

### 3 活動結果

- (1) 等式・不等式の証明の章末に、調和平均に関する次のような話題が紹介されている。

ある道のりを車で往復しました。行きは平均速度  $a$  km、帰りは平均速度  $b$  km で走りました。このとき往復にかかった時間と同じ時間をかけて、行きと帰りを一定の速さで走るとすると、時速何 km で走ればよいのでしょうか。

求めたい時速は  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$  で表され、この値を

$a$  と  $b$  の調和平均といいます。①この調和平均は、電気回路や音楽など、いろいろな分野で重要な働きをします。さて  $a$  と  $b$  の相乗平均と調和平均の大小関係を示す②次の不等式を証明してみましょう。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

この話題に対して、下線部①から日常生活に関連が

ある電気回路や音楽について調べさせることが考えられる。また下線部②について、相乗平均と調和平均の大小関係を証明することが考えられる。さらに、相加平均・相乗平均の関係を拡張した、下の不等式の証明を考えさせてもよいと考える。

$$a > 0, b > 0, c > 0 \text{ のとき, } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

- (2) 関数の値の変化の章末に、2次関数の増減と導関数に関する次の話題が紹介されている。

2次関数の増減を調べる方法として、平方完成を数学 I で学びました。2次関数の増減にも導関数を利用することができます。例えば、

$$y = 3x^2 + 4x + 2$$

を微分すると

$$y' = 6x + 4$$

となり最大値または最小値を与える  $x$  の値は

$$y' = 0$$

を解けばわかります。①この2次関数の最大値または最小値を求めてみましょう。

この話題に対して、下線部①から与えられた2次関数のグラフを、平方完成を利用する方法と導関数を利用する方法の2通りで書かせ、導関数を利用する方法の良さを考察させることが考えられる。また、平成21年度島根大学総合理工学部電子制御システム工学科の推薦入学 I の小論文に次のような問題があり、これを解かせることが考えられる。

以下の式を用いて解答する問題を作成せよ。ただし、問題は2次関数の形状に関するものとする。

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

- (3) 円の方程式の章末に

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

の表す図形に関する次のような話題が紹介されている。

次の方程式がどのような図形を表すか考えてみましょう。

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$$

方程式を変形すると、次のようになります。

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 0$$

この等式を満たす実数  $x, y$  は  $x=3, y=-1$  だけです。したがって、この方程式が表す図形は点  $(3, -1)$  なのです。①次の方程式は、何の図形も表しません。どうしてなのでしょう？

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 12 = 0$$

この話題に対して、下線部①から、その理由を考察させることが考えられる。また、平成 19 年度島根大学総合理工学部電子制御システム工学科の推薦入学 I の小論文に次のような問題があり、これを解かせることが考えられる。

$\alpha$  と  $\beta$  を任意の実数として、方程式

$$x^2 + y^2 - 6x + \alpha y + \beta = 0$$

が円を表すための  $\alpha$  と  $\beta$  の満たすべき条件式を導け。

(4) 高次方程式の章末に 1 の 3 乗根に関する次の話題が紹介されている。

1 の 3 乗根は、

$$x^3 = 1$$

を満たす  $x$  の値です。1 の 3 乗根のうち、虚数であるものの 1 つを  $\omega$  とするとき、 $\omega^2$  も 1 の 3 乗根になります。このことは、次のように確かめられます。

$$\omega^3 = 1 \text{ なので } (\omega^2)^3 = (\omega^3)^2 = 1^2 = 1$$

また、 $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$  ですから、 $\omega$  は  $x^2 + x + 1 = 0$  の解で、 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  が成り立ちます。① $\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ を利用して、次の値を求めましょう。

$$\omega^{16} + \omega^8 + 2$$

この話題に対して、下線部①のように与えられた式の値を求める問題を考察させることが考えられる。また、複素数平面を用いて 1 の 3 乗根を図示させ、これを参考にして、1 の 4 乗根、6 乗根などを求めさせることが考えられる。

#### 4 おわりに

平成 21 年 3 月に告示された学習指導要領では数学 I と数学 A の内容に課題学習が含まれている。この課題学習では、学習内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたたり発展させたりするなどし

て、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主體的な学習を促し、数学のよさを認識できるようすることが目標とされている。学習内容が明確に決まっていなくても、実際には教科書の章末に課題研究として掲載されたものを扱うことが予想される。実施に向けて、今回の取組で扱ったように、課題研究を通して数学的な活動が促されるよう研究を重ねていく必要があると感じた。

《参考文献》

- [1] 吉田明史『創造性の基礎を培う数学的活動実践事例集〈数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学B・数学C〉』学校図書
- [2] 吉田明史・飯高茂『高等学校学習指導要領の展開』明治図書
- [3] 大矢雅則・岡部恒治ほか『改訂版 新編 数学Ⅱ』数研出版