教具を用いた数学の指導法の研究③

愛媛県立宇和島南中等教育学校　小池　長八郎

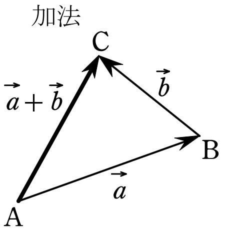
1　はじめに

ベクトルを学習するとき，ベクトルの演算→位置ベクトル→2直線の交点のベクトル→ベクトル方程式という流れで進んでいくが，ベクトル方程式での媒介変数表示，さらにベクトルの終点の存在範囲を求める問題までくると，ベクトルの総合的な理解が必要となり，実際には全く身についてなかったということになってしまうことも少なくない。そこで今回は，ベクトルの演算とベクトルの終点の存在範囲を求める問題について，斜交座標の考え方を紹介しながら，この問題についての理解を深めさせたいと思う。

2　研究内容

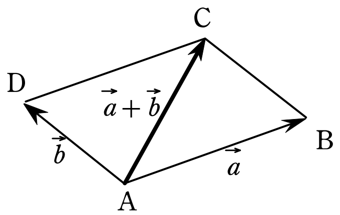
①　ベクトルの演算について

加法



【三角形の法則】

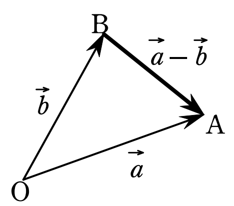
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



【平行四辺形の法則】

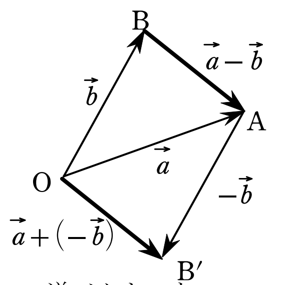
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

減法



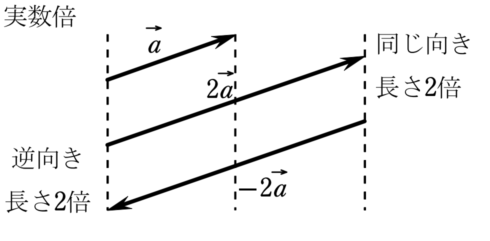
【三角形の法則】

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

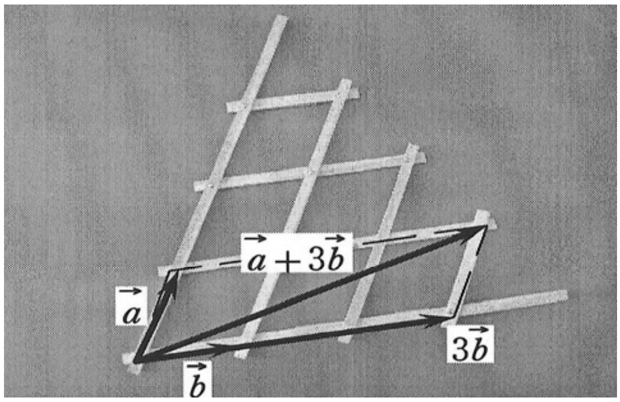


逆ベクトルを用いた方法

実数倍

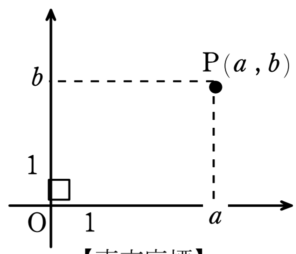


100円均一のお店で，使えそうなものを見つけた。教科書で説明の後に，確認として使うとおもしろいかもしれない。また，平面上における，ベクトルの1次独立について説明もしやすいと思う。そして，次にあげる斜交座標の導入にも活用できる。

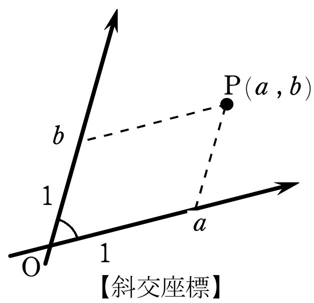


②　ベクトルの終点の存在範囲について

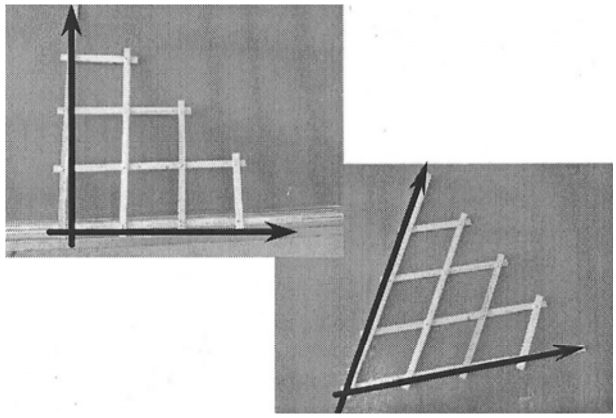
まず，座標が点の位置を明確にするために与えられる数の組であることを確認し，次に直交座標と，軸が斜めに交わった斜交座標を紹介する。



【直交座標】



【斜交座標】



ベクトルを用いると

【直交座標】

$\overrightarrow{e_1}=(1,0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,1)$

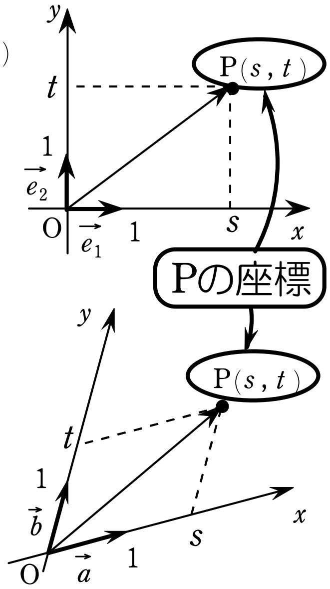
に対して

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{e_1}+t\,\overrightarrow{e_2}$

【斜交座標】

$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$

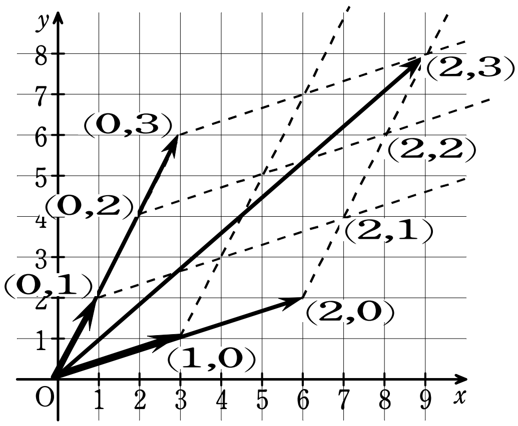
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\vec{a}+t\,\vec{b}$



例　3点O（0，0），A（3，1），B（1，2）

に対して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　で表される点Pの

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を基底とする斜交座標は(2，3)



例題　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$x+y=1$　が成り立つときの

点Pの存在範囲

考え方

直交座標で，P(x,y)が

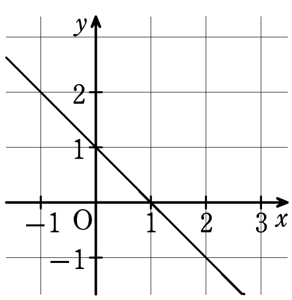
$x+y=1$ をみたす

⬇

Pの存在範囲は

直交座標における

直線　$x+y=1$



△OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を示せ。ただし，s，t は実数とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$\left(s+t=\dfrac{1}{2},\ s\geqq 0,\ t\geqq 0\right)$

(数研出版　改訂版　新編　数学B　p37　応用例題6）

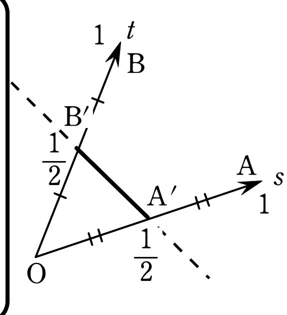
考え方

斜交座標で，P(s , t)が

$s+t=\dfrac{1}{2}$ ，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

⬇

Pの存在範囲は，斜交座標における直線　$s+t=\dfrac{1}{2}$の$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ の部分



直交座標における問題と同じ！

数学Ⅱ「不等式の表す領域」と関連した問題

△OABに対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

（s，t は実数）とする。

$s+t\leqq\dfrac{1}{2}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$であるとき，点Pの存在範囲を求めよ。

数研出版　改訂版　教科書傍用

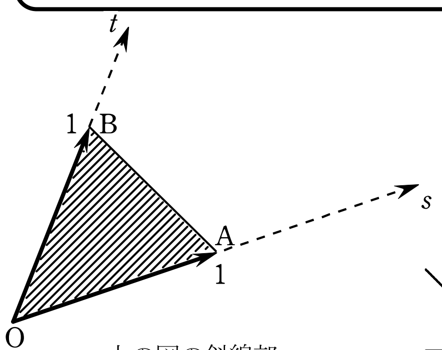
クリアー　数学Ⅱ＋B　p115　例題14

考え方

斜交座標で，P(s,t)が　$s+t\leqq 1$ ，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

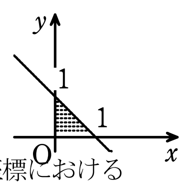
⬇

Pの存在範囲は，斜交座標における直線　$s+t=1$ の下側（境界線含む），$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ の部分



上の図の斜線部

（境界線含む）



直交座標における

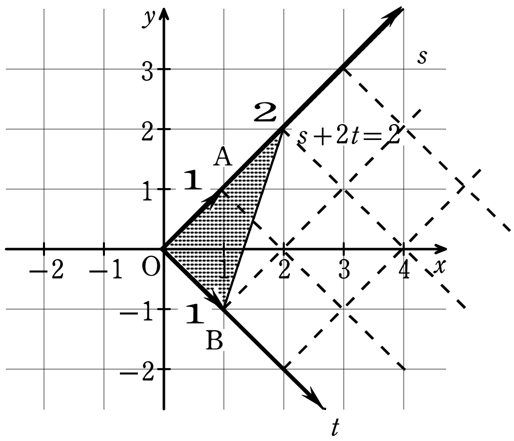
$x+y\leqq 1$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

大学入試問題でも。

点Oを原点とする座標平面上に2点 A(1, 1), B(1, −1) がある。

実数 s, t によって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められる点Pを考える。s, t が $s+2t\leqq 2$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ を満たしながら動くとき，点Pの存在する範囲を求めよ。更に，その範囲が表す図形を図示せよ。

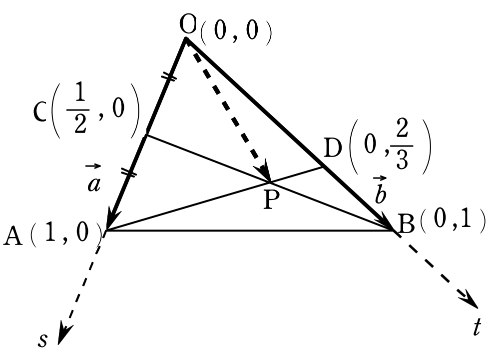
(H22　茨城大)



ベクトルの終点の存在範囲の問題以外でも，2直線の交点の位置ベクトルを求める問題に対しても斜交座標の考えが利用できる。

△OAB において，辺OAの中点をC，辺OBを2 : 1に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(数研出版　改訂版　新編　数学B　p33　応用例題4)



解答

$\vec{a}$，$\vec{b}$ を基底とする斜交座標を考える。

直線ADの方程式は $\dfrac{s}{1}+\dfrac{t}{\frac{2}{3}}=1$

すなわち　$2s+3t=2$　…①

直線BCの方程式は $\dfrac{s}{\frac{1}{2}}+\dfrac{t}{1}=1$

すなわち　$2s+t=1$　…②

①，②からAD，BCの交点Pの座標は　$\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

３　研究のまとめと課題

今回，数学Bの「ベクトル」の問題が、数学Ⅱの「図形と方程式」で解けることがとても興味深い内容であると感じた。1つの問題に対して，複数のアプローチがあることを示すことは，生徒たちの混乱を招くおそれがあるかもしれないが，その一方でその問題に対しての興味関心が沸き，より理解を深めることができる可能性も秘めている。どの単元に対しても，教科書での内容をしっかりと伝えた上で，さまざまな解法があれば積極的に紹介していき，更なる研究に励みたいと思う。