

# 課題学習の指導法の研究 — 2次関数 —

愛媛県立川之江高等学校 井上 真一

## 1 はじめに

数学及び理科については、平成24年度入学生から新学習指導要領による指導が実施される。教育内容の改善事項として、理数教育を充実させるため、知識・技能を活用する学習や探究する学習を重視し、課題学習が導入されている。そのことを踏まえ、来年度の準備が少しでもできればと思い、本主題を設定した。本校の第1学年は8クラスあり、習熟度別クラス編成をしている。習熟度の高い方から順にⅠ型が1クラス、Ⅱ型が2クラス、Ⅲ型が5クラスある。今年はⅢ型の1クラスを授業で担当することになった。研究する内容については、2次関数を扱うことにした。

## 2 研究の目標

- (1) 数学Ⅰの課題学習について調べる。
- (2) 学習のテーマを2次関数として課題学習を実践し、生活と関連付けたり発展させたりする。

## 3 数学Ⅰの課題学習

数学Ⅰの内容

- (1) 数と式
- (2) 図形と計量
- (3) 二次関数
- (4) データの分析

[課題学習]

(1)、(2)、(3)及び(4)の内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主體的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする。

[内容の取扱い]

課題学習については、それぞれの内容との関連を踏まえ、学習効果を高めるよう適切な時期や場面に実施するとともに、実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする。

課題学習の実施については、内容との関連を踏まえ、適切な時期や場面を考慮することが大切である。必ずしも、それぞれの項目の終りに実施する必要はなく、複数の項目にわたる課題を学習したり、場合によってはより早い時期に課題学習を行いそれ以後の内容ではどのようなことを学習するのかを感じ取らせ、関心や意欲をもって学習を進めさせることも可能である。

実施に当たっては、一方的に知識を与えるのではな

く、数学的活動を一層重視することが大切である。例えば、課題を理解する、結果を予想する、解決の方向を構想する、解決する、解決の過程を振り返ってよりよい解決を考えたり、更に課題を発展させたりする、という一連の過程に沿って、必要な場面で適切な指導を工夫するとともに、適宜自分の考えを発表したり議論したりするなどの活動を取り入れるよう配慮する。

また、課題については、日頃から生徒が関心をもちそうな話題や生徒に育てたい能力とその能力を育てるために相応しい話題などを考えておくこと、生徒の疑問を課題として取り上げたり、生徒の疑問を課題として設定させたりすることなどが大切である。

## 課題学習の例

身近な事象を二次関数を用いて考察し、数学のよさを認識する。

身近な事象として、文化祭で模擬店を開設して食品を販売し利益を寄付するためにその利益を最大にすることを取り上げる。

例えば、食品の値段を上げると売れる食品の数は一定の割合で減少すると仮定して、純利益と食品の値段の関係を二次関数で表し、純利益が最大になるように食品の値段と売れる数を決定する活動が考えられる。特に、食品の値段と売れる食品の数との関係をどのように仮定するのがよいかを生徒に工夫させるようにする。

### (7) 『数学Ⅰ』（数研出版）

「2次関数をもつ性質」

学習のテーマ：2次関数

2つの量 $x$ 、 $y$ についていくつかの値の組が与えられたとき、 $y$ が $x$ の2次関数になっていることを調べることにしよう。

**課題10** 右の表は、ある2つの量 $x$ 、 $y$ がとる値である。

$y$ が $x$ の2次関数になっているかどうかを調べてみる。

- (1) 初めの3つの $x$ 、 $y$ の値をとるような2次関数を求めよう。

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 4 | 3 | 4 | 8 |

- (2) 残りの $x$ 、 $y$ の値がその2次関数を満たすかどうかを調べよう。

**課題11** 2次関数  $f(x)=ax^2+bx+c$  について、 $g(x)=f(x+1)-f(x)$  とする。次の値を求めよう。

- (1)  $g(2)-g(1)$  (2)  $g(3)-g(2)$  (3)  $g(4)-g(3)$

**課題12** 2次関数をもつ上の性質を利用して、課題

10のx, yについて、yがxの2次関数でないことを示そう。

<まとめの課題>

2次関数  $y=ax^2+bx+c$  のグラフが3点(0,3), (1,5), (2,3)を通るとき、2次の係数 a の値を求めよう。

**配慮されている点**

学習事項を発展させて、生徒が数学を探究できる課題としている。様々な運用に対応するため、巻末にまとめ、1テーマに対して複数の課題を設定している。

(イ) 『高等学校数学 I 』 (数研出版)

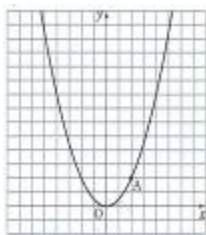
「放物線の性質」

学習のテーマ：2次関数

2次関数のグラフである放物線には、図形的に面白い性質がある。ここでは、放物線の拡大・縮小に関する性質を調べることにしよう。

**課題5** 下の図は放物線  $y=x^2$  で、点Aの座標は(1,1)とする。x軸とy軸の目盛りの尺度を次のように変えるとき、新しい目盛りでの放物線の方程式を求めてみよう。

- (1)点Aの座標が(2,2) (2)点Aの座標が $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



**課題6** 課題5において点Aの座標が(a,a)であるとき、新しい座標平面におけるこの放物線は、どのような2次関数のグラフであるかを調べてみよう。

<まとめの課題2>

2つの放物線は一方を拡大すると他方が得られるので、すべての放物線は互いに相似である。では、放物線  $y=ax^2$  から放物線  $y=bx^2$  を得るには、どのようにすればよいのだろうか。ただし、 $a>b>0$  とする。

**配慮されている点**

様々な運用を考慮して、巻末にまとめて取り上げ、1つのテーマに対して複数の課題を設定している。各テーマの最後には「まとめの課題」をおき、総合的なレポート課題としても使えるようにしている。既習内容を発展させ、数学の内容そのものを深める課題を中心に取り上げている。

(ウ) 『新編数学 I 』 (数研出版)

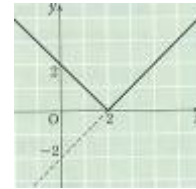
「絶対値を含む関数と方程式、不等式」

学習のテーマ：数と式、2次関数

絶対値のつく関数  $y=|f(x)|$  のグラフを調べてみよう。さらに、グラフを利用して、絶対値を含む1次不等式、2次不等式を解いてみよう。

**課題3** 関数  $y=|x-2|$  について、次のことを確かめよう。

- (1)  $x \geq 2$  のとき  $y=x-2$  (2)  $x < 2$  のとき  $y=-x+2$



**課題4** 次の関数のグラフをかいてみよう。

- (1)関数  $y=|x-1|$  (2)関数  $y=|x+2|$

**課題5** 次の関数のグラフをかいてみよう。

- (1)関数  $y=|x^2-1|$  (2)関数  $y=|x^2-2x|$

**課題6** 次の方程式、不等式を解いてみよう。

- (1)  $|x-2|=2x$  (2)  $|x-2|>2x$

**課題7** たとえば、不等式  $|x-2|>2x$

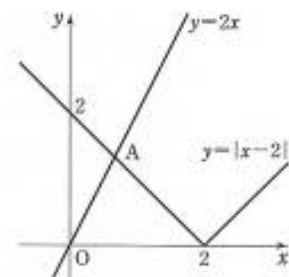
の解は、関数  $y=|x-2|$  のグラフが直線  $y=2x$  より上側にある x の値の範囲である。

- (1) 下の図の交点Aの x 座標を求めてみよう。  
(2) グラフを利用して、不等式  $|x-2|>2x$  を解いてみよう。

<まとめの課題2>

不等式  $f(x)>mx$  なら、その解は関数  $y=f(x)$  のグラフが直線  $y=mx$  より下側にある x の値の範囲である。次の不等式を解いてみよう。

- (1)  $|x-2|<\frac{1}{2}$  (2)  $|x-1|<\frac{1}{2}x$



**配慮されている点**

様々な運用を考慮し、巻末にまとめて取り上げ、1つのテーマに対して複数の課題を設定している。各テーマの最後には「まとめの課題」をおき、総合的なレポート課題としても使えるようにしている。

4 研究の内容

数学 I の2次関数を学習した後の授業を2時間利用し、以下の内容について考えさせた。

- (1) 放物線の性質

- (ア) 身の回りにおける放物線を探す。

<生徒の意見>

- ・投げ上げたボール（物）の軌跡
- ・水の放水（噴水）の軌跡
- ・パラボラアンテナ

(1) 放物線の性質を利用した活動

鏡の前の適当な位置に籠を置く。物を鏡に向かって投げ、そのはねかえりで籠に入れるためには、物をどのように投げればいいのかを考えさせた。

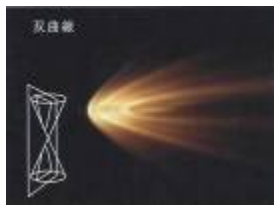
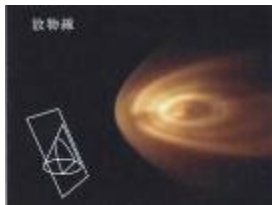
鏡の向こう側にある籠に向かって、放物線を描くように投げれば、下の写真のように入る。



鏡に当たる所が頂点になるようにすれば、手元に戻ってくる。

(2) 円錐曲線の1つとしての放物線

2次曲線は、円錐を切断した切断面に見出すことができるため、「円錐曲線」とも呼ばれている。懐中電灯の光が、円錐の形で広がるという性質を利用して、懐中電灯の灯りを壁面に当てることで、放物線を探させた。



円錐の母線に平行な平面で切断すると放物線が得られ、母線に平行ではない平面で切断すると双曲線が得られる。双曲線を作り、「何かおかしい、先がちよっと尖っている」と疑問に思う者がいたが、多くの生徒が双曲線を放物線だと勘違いしていたので、このことを簡単に説明をした。そのときに、円と楕円についても触れた。

(3) 教科書にあるコラムの発展的な内容

授業では実践していないが、来年度本校で使用する

予定の『新編数学 I』のコラムについて課題学習で扱えないか考えてみた。

コラム：「放物線の不思議」

衛星放送受信用のアンテナの面は、放物線とその軸を中心に1回転させてできる面の形をしています。このような面には、回転軸に平行に進んできた電波がこの面で反射するとき、そのすべてがある1点を通過するという性質があります。この点は放物線の焦点と呼ばれます。このアンテナはパラボラアンテナと呼ばれますが、さて、parabolaの意味は.....?

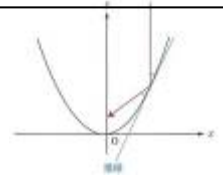
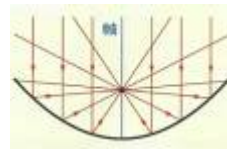


図1

図1のように電波も「入射角=反射角」という反射の法則に従う。また、放物線にぶつかった電波は、ぶつかった座標における接線において反射させられると考えることができる。

これらのことを前提として、y軸に平行に進入してくる電波は、そのx座標に関係なく焦点を通ることを示す。

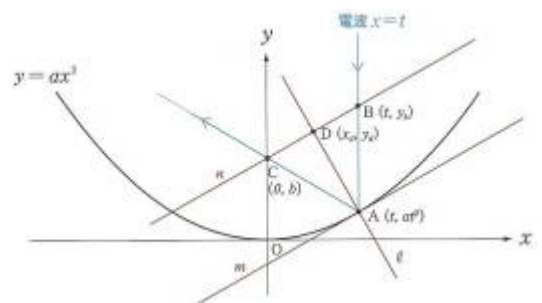


図2

図2のように、放物線を  $y = ax^2$  とする。

これを  $x$  について微分すると、 $\frac{dy}{dx} = 2ax$

つまり、放物線上の点  $A(t, at^2)$  における接線  $m$  の傾きは  $2at$  である。

次に、 $A$  を通り、 $m$  と直交する線を  $l$  とおく。

$m \times l = -1$  なので、 $l$  の傾きは  $-\frac{1}{2at}$

よって、 $l: y = (-\frac{1}{2at})x + at^2 + \frac{1}{2a} \dots \textcircled{1}$

次に、 $y$  方向から点  $A$  に向けて入射した電波（直線  $BA$ ）の反射波（直線  $AC$ ）と  $y$  軸との交点を点  $C(0, b)$  とする。このとき、点  $B$  と点  $C$  を結ぶ直線を  $n$  とおくと

$n: y = 2atx + b \dots \textcircled{2}$

このとき、直線  $n$  と直線  $l$  の交点  $D$  の  $x$  座標  $x_d$  は

①、②より

$$x_d = \frac{at^2 + \frac{1}{2a} - b}{2at + \frac{1}{2at}} \dots \textcircled{3}$$

$\angle BAD = \angle CAD$ 、 $BC \perp AD$  であるから  $CD = BD$  である。ゆえに

$$2x_d = t \dots \textcircled{4}$$

③、④より  $b = \frac{1}{4a}$

このことから、 $b$  の値は  $t$  の値に影響を受けず、常に一定である。このため、 $y$  軸に平行に進んできた電波は放物線上のどの点で反射したとしても、必ず点

$$\left(0, \frac{1}{4a}\right)$$

を通ることになる。

<生徒の感想>

- ・懐中電灯 1 つでいろいろな曲線ができてすごいと思いました。身の回りにはたくさんの放物線があることがわかりました。
- ・今までに知らない曲線がたくさんあったので、面白かった。
- ・放物線以外にもいろいろな曲線があって驚きました。またやりたいです。
- ・いろいろな所で放物線を使っていることがわかった。
- ・2次関数が嫌いだったので、今日の授業は難しいのかと思っていたら、案外すぐに分かったのが楽しかったです。
- ・懐中電灯を使って放物線などの曲線が作れることに感動しました。日常にいろいろな曲線があることがわかりました。
- ・曲線に興味がわいてきました。
- ・身の回りにたくさんの数理曲線があることが分かったのでよかったです。これからは身の回りにある数理曲線を注意して探してみたいと思う。
- ・懐中電灯の角度を変えるだけで、円になったり放物線になったりするの面白い。

<自己評価> 授業に興味や関心を持って取り組めたか。

|           |     |
|-----------|-----|
| よきできた     | 17人 |
| できた       | 12人 |
| どちらともいえない | 4人  |
| あまりできていない | 0人  |
| できていない    | 0人  |

## 5 研究の成果と今後の課題

### (1) 成果

学習した内容を日常生活に関連付け、関心や意欲が高まった。また、数学Ⅱで学習する円や数学Ⅲで学習する二次曲線に関連付けることができたと思う。

### (2) 今後の課題

課題は山積である。今回の実施内容は、意欲や関心を高めるものであり、自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたり等といったことはほとんどできていない。本校では習熟度別クラス編成をしているので、習熟度により扱う内容を変えた方が適切である。また、評価をどうするのかという問題がある。習熟度の高いクラスであれば課題に対して深く掘り下げていくこともできるが、そうでなければ多くの課題を設定した方が評価はしやすいだろう。しかし、課題学習の主旨を踏まえ、単なる応用問題の演習に止まることなく、自分の考えを発表したり議論したりするなどの活動を積極的に取り入れていきたい。

《参考文献》

- ・『高等学校学習指導要領』（文部科学省）
- ・『高等学校学習指導要領解説数学編』（文部科学省）
- ・大島利雄ほか13名『数学Ⅰ』  
数研出版株式会社（平成23年検定済）
- ・岡部恒治ほか17名『高等学校数学Ⅰ』  
数研出版株式会社（平成23年検定済）
- ・大矢雅則ほか17名『新編数学Ⅰ』  
数研出版株式会社（平成23年検定済）
- ・佐藤雅彦『日常にひそむ数理曲線』株式会社小学館