数列の指導法の研究

愛媛県立小松高等学校　笹岡　慎太郎

1　はじめに

11 月に、次のようなアンケートを2年生理系の生徒に実施した。

1．数学Ⅱ・Bでどの分野が得意ですか。

1位	三角関数	43%
〈理由〉	・テストで点が取れるから。 ・単位円で考える問題が面白いから	

2位	微分法	32%
〈理由〉	・思ったより簡単だから	

2．数学Ⅱ・Bでどの分野が苦手ですか。

1位	数列	56%
〈理由〉	・計算がややこしいから ・難しいから ・解き方が頭に入ってこないから	

2位	図形と方程式	23%
〈理由〉	・軌跡がよくわからなかった	

数列の分野が「苦手」と感じる生徒が圧倒的に多かった。この分野は文字を含む計算が多く、計算力や考察力、分析力、推測力が必要となってくる。そこで、身近なものから数列を感じてもらい、生徒の数列に対する「苦手」意識を改善するために、復習も兼ねて、教具を用いて数列の指導を行った。教科書では、2 乗の和の公式は $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ を用いて求めているが、生徒にとっては、分かりにくい導き方であると思う。そこで、数列の和を表す模型を用意し、2 乗の和の公式や他の式を導く指導を行った。

2　研究の目標

(1)　教具を用いて和の公式を導くことにより、数列に対しての学習意欲や興味・関心を高める。

(2)　教具を用いて授業を行うことにより、生徒の知的好奇心を引き出させる。

3　研究の方法および内容

数学Bの数列の分野を学習した後の授業を1時間利用し、数列の式についてのアプローチを行った。最初に、どの式について行うのかは公言せずに、式を推測させる形で授業を展開した。また、少人数の講座なので、3班に分けて、班別で行った。

(1)　2 乗の和の公式

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

ア　模型を用いた指導

次のような小立方体を積み重ねた模型をそれぞれ 6 個準備する。

それぞれ 6 個をうまく組み合わせることで、直方体ができあがる。

〈実際の授業の様子〉

完成すると、歓喜の声があがった。3 分もかからずにできた班もあった。早くできた班は、もう一度作成させたり、段がもう一つ増えたらどうなるか、またこの模型から導かれる式は何かを考えさせた。

1 ページ目の 3 枚目の写真の班では、4 段の模型で作成したので、各辺が 4、5、9 の直方体になる。n^2 段の模型においては、各辺が n、(n+1)、(2n+1) となる直方体ができあがる。

よって、

$$6\times\sum_{k=1}^{n}k^2=n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が導かれる。

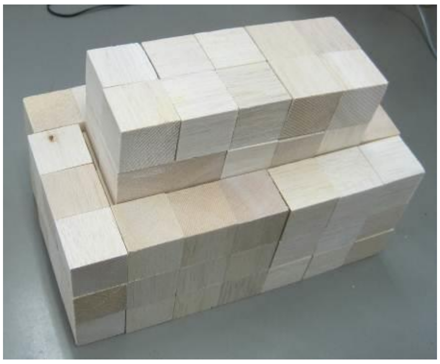
また、k×k×1 の模型を 6 個用意し、下図のように組み立てる。

1×1×1 を 6 個

2×2×1 を 6 個

3×3×1 を 6 個

それぞれ穴を埋めるように組み立てると、



↓

となり、先ほどの直方体と同じ形になり、この模型からも 2 乗の和の公式が得られる。

イ　比を用いた指導

この指導は教具を利用した形ではないが、和から推測する方法で、自然な導き方と思い、導入した。

S_n を 2 乗の和、T_n を自然数の和とする。それぞれ初項から第 5 項まで書き表すと、

$T_1=1$	$S_1=1^2=1$
$T_2=1+2=3$	$S_2=1^2+2^2=5$
$T_3=1+2+3=6$	$S_3=1^2+2^2+3^2=14$
$T_4=1+2+3+4=10$	$S_4=1^2+2^2+3^2+4^2=30$
$T_5=1+2+3+4+5=15$	$S_5=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$

となる。次にそれぞれの項で $T:S$ の比を考える。

その際、T を 3 に固定すると、

$$T_1:S_1=3:3$$
$$T_2:S_2=3:5$$
$$T_3:S_3=3:7$$
$$T_4:S_4=3:9$$
$$T_5:S_5=3:11$$

となり、$T_n:S_n=3:(2n+1)$ なので、

$$S_n = \frac{2n+1}{3} T_n \quad ここで、T_n = \frac{1}{2} n(n+1) より$$

$$S_n = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

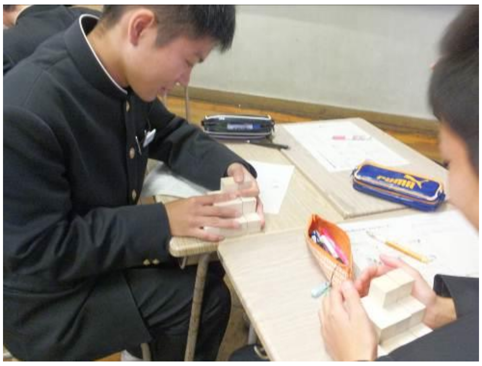
が導かれる。

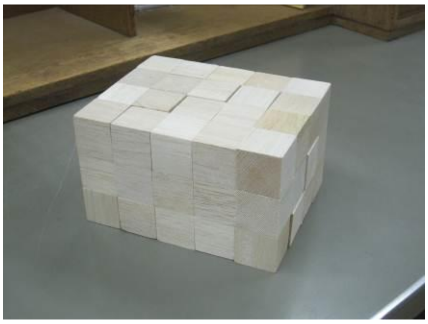
(2)　$k(k+1)$ の和の式

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)}$$

(1)のアで用いた模型を3個利用し、それぞれに1+2+3+…+n の模型(両面テープを用意)を付ける。(一つは反対側)

2 乗の和の公式時と同様に、直方体を作らせた。今回は3個の模型から直方体を作るので、比較的早く完成した。





直方体の辺が n、(n+1)、(n+2) となるので、

$$3\{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)\} = n(n+1)(n+2)$$

$$3 \times \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) = n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

が導かれる。

4　まとめと考察

〈生徒の感想〉

・模型から数列の式が得られることに驚いた。
・数列が少し好きになった。
・他の式も模型で表すことができるのか、気になった。
・直方体ができた瞬間、鳥肌が立った。
・一人に一つ模型があるとよかった。

生徒の感想を見ていると、研究の目標である「数列に対する興味・関心を高める」ことはできたように思う。また、「他の式も模型で表すことができるのか気になった」という感想があったので、私自身も今後考えていき、また、生徒にも考えさせて(長期休業中の課題にして)意見を聞いてみようと思う。

私はこれまで、こういった教具を作成する機会がほとんどなかった。それは、自分の中で「教具を用いて授業を行っても、例え生徒が理解しても、できるようにはならない。それだったら、演習の時間を多くしてできるようにしよう。」という考えがあったためであった。しかし、昨年の高教研大会で前指導主事の石崎学校長先生の講話を聞いて、私自身、とても興奮した。そして、数学に対する興味・関心がそれまで以上にものす

ごく高まった。この体験を自分の生徒たちに味わってもらいたいという思いが溢れ、今年度は、今回紹介した数列の 2 乗の和の公式をはじめ、時間を見つけては様々な教具を作成し、授業で実践している。ただ、教具を用いて授業をして、生徒が興味・関心を持っただけで終わってはいけないので、その後の指導をきちんと行わなければならない。今後は、目的や生徒の実態に合わせながら、教具を作成し導入していけるよう、日々研究に励みたいと思う。

《参考文献》

『たのしくわかる数学 100 時間』(日本評論社)