弧度法の指導法の研究②

愛媛県立今治東中等教育学校　増田　稚子

1　はじめに

数学Ⅱの「三角関数」では、角度の新しい測り方として弧度法が導入される。前回は、度数法から弧度法への変換の定着を目標とし、視覚的に理解させ、さらに考える過程を理解させるための指導法の研究を行った。実践を行い、多くの生徒が単位円を利用して考えることができるようになった。また、弧度法の考え方を理解できた生徒は、代表的な角度の三角関数の値もすばやく求めることができるようになった。そのため、三角関数を含む方程式や不等式を解く際にも単位円を用いて考えることができる生徒が多くなった。しかし、動径が変化したり、範囲を変えて出題されたりすると角度の捉え方がよく分からなくなる生徒が多く見られた。

また、数学 C の「式と曲線」では、新しい概念として極座標を定義し、極座標を用いて既習の曲線を表したり、極座標を使うことで容易に表せる曲線について考えたりする。これまで座標は直交座標で考えることが主流で、極座標は生徒にとって理解しにくいものであると考えた。

そこで、前回の研究を生かし、三角関数を含む方程式や不等式を単位円を用いて解けるようにすることと、極座標と直交座標の変換の定着を図るため、この主題を設定した。

2　研究の目標

(1) 目標に応じて、三角関数の式を変形できるようにする。

(2) 図を用いて考えることの利点を理解させ、三角関数を含む方程式や不等式を解くことができるようにする。

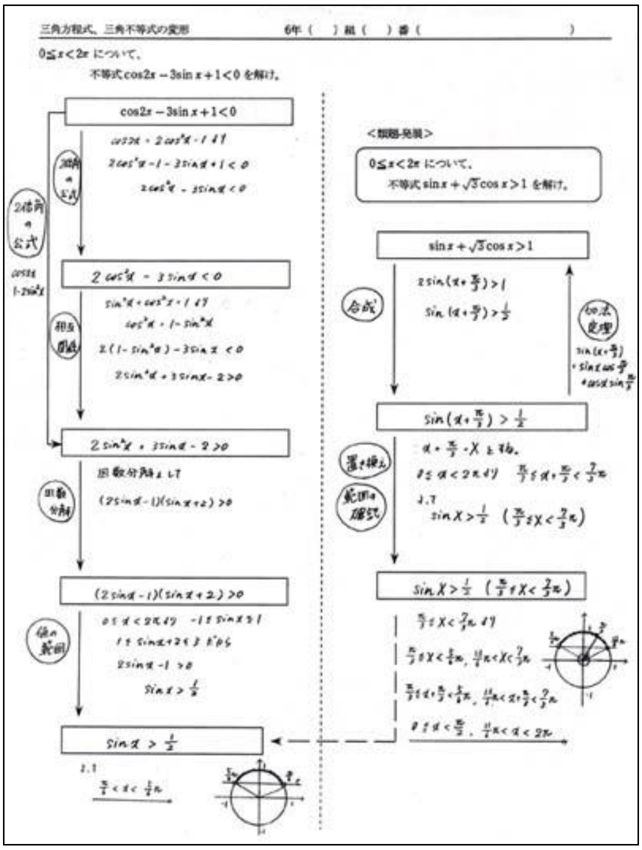
(3) 視覚的に理解しやすいように、極座標グラフを用いて極座標と直交座標の変換を理解させる。

3　研究の内容

(1)　三角関数の式を変形させる

三角関数を含む方程式や不等式を解くときや、三角関数で表された関数の最大値・最小値を求めるときには、いろいろな公式を用いて式を変形する。何を目標にして式を変形するのかということを意識させて、その目標に応じた変形ができるようにしたいと考えた。

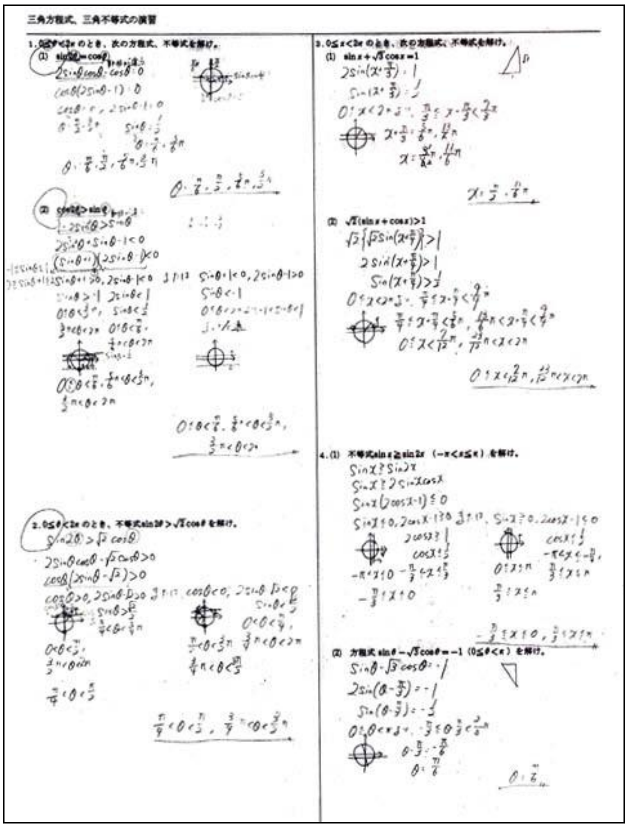
そこで、次のようなフローチャートのワークシートを用いて、式の変形をさせた。変形を行うときには、どこを、どのように変形するのか、そのとき用いる公式や考え方は何かを言葉で表現させ、目標に応じた変形を意識させた。



（フローチャートのワークシート）

(2)　三角関数を含む方程式や不等式を解くことができるようにする

さまざまな問題を解くことで、応用力を身に付けさせた。式の変形ができたら範囲に応じた解を求めるため、動径に注意をして考えさせた。図を用いることで考えやすくなることや動径が変化したときにどのように考えるとよいかについて説明をし、演習を行った。同じ式でも定義域を変えたり、不等式の大小を変えたり、方程式から不等式にすることで、考え方が変わるところや注意が必要なところが出てくる。１つの式から様々な問題を作ることができ、それらの問題を解くことでより理解が深まると考えた。



（演習問題での生徒の解答）

(3)　極座標と直交座標の変換を理解させる

平面上の点の位置を表す方法として、「基準点からの距離 r と、基準線からの角度 θ」で（r，θ）と表す極座標があることを説明した後、直交座標から極座標へ、極座標から直交座標への変換を行った。直交座標では、１つの点を x 座標と y 座標の２つの要素を用いて表している。大切なことは、極座標でも、１つの点を距離と角度の２つの要素から表していることを理解させることである。

教材研究を行う中で、極座標をとりやすい極座標グラフの存在を知った。そこで、視覚的に理解しやすく、直交座標との関係に気が付くことができるように、次のようなグラフを作成した。

図１は、点線をたどることで距離と角度を確認することができる。角度が $\frac{\pi}{6}$ 、$\frac{\pi}{4}$ 、$\frac{\pi}{3}$ の倍数となるものを円の弧の長さの割合から考えることができる。また、x 軸と y 軸の $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ などの点から、辺の長さの比や斜辺の長さも正確に捉えることができる。

図２は、図１のグラフを簡素化したものである。極座標の考え方が理解でき、図１を用いて点の取り方が理解できてから利用する。

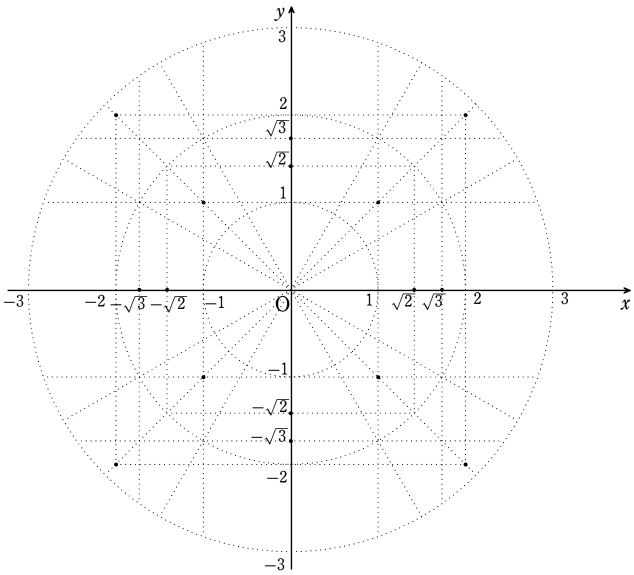


図１　極座標グラフ１

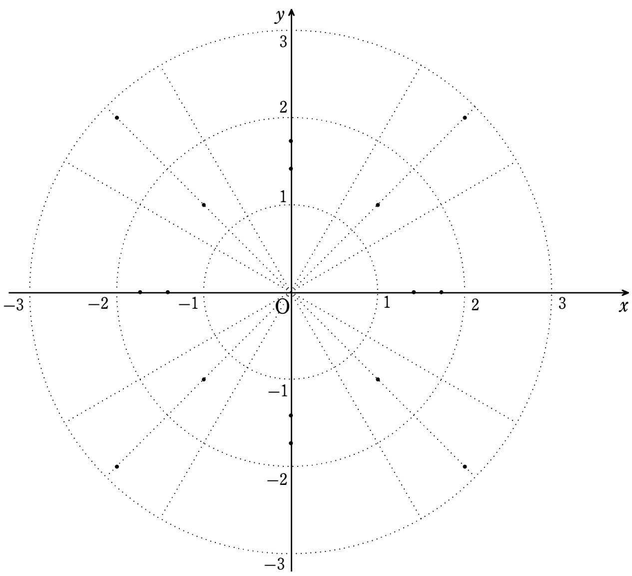


図２　極座標グラフ２

目標は生徒が自分で基準線を書き、そこから距離と角度をとって極座標と直交座標との変換ができるようにすることである。そのためには、情報を少しずつ減らしていくことで、これまでと同じように考えることができる部分を意識しながら、新しい考え方に移行することができ、理解が深まると考えた。

4　研究の成果と今後の課題

三角関数が苦手であると話していた生徒に話を聞いていると、「たくさんの公式の中から、どの場面でどの公式を使えばよいのか分からない」という声が多かった。今回、目標を持って使う公式を考え変形し、問題を繰り返し解いた結果、変形の仕方を理解し、自分なりの言葉で説明することができる生徒が増えた。また、生徒同士で分からないところを質問したり、説明したりする中で、お互いに理解を深めていくことができていた。

三角関数を含む方程式や不等式を解く中でも、生徒の多くは図や単位円を用いて考え、範囲の変化にも対応できるようになっていた。しかし、方程式を解くことができても、不等式を解くときに「定義域や範囲が複雑になるとよく分からない」と答える生徒もおり、反復練習の必要性を感じた。

極座標への変換では、これまで直交座標を用いて考えていたため、極座標の考えをスムーズに受け入れられる生徒と理解しにくい生徒とに分かれた。座標は、直交座標に限らず斜交座標などもあり、それぞれの場面で考えやすいものを選んでいくことも大切である。生徒にとっては、直交座標以外の座標があることが新鮮であったようで、新しい考え方に関心を強く持っていた。

今回の研究を通して、これまでの学習内容を生かした指導を考えることが生徒の理解を深めることに繋がることを感じた。今後は、学習した内容が定着するように効果的な家庭学習の取組についても考えていきたい。