数列の和Σの立体模型の作製に関する研究

愛媛県立小松高等学校　笹　岡　慎太郎

1　はじめに

昨年度、高教研数学部会研究部学習指導法研究委員会において数列の指導法の研究を行った。その際、２乗の和の公式やｋ（ｋ+１）の和の式を模型を用いて表す授業を展開した。その後のアンケートで、数列に対して興味・関心を持った生徒が多く、中でも「他の式も模型で表すことができるのか、気になった」という感想を書いた生徒が数名いた。その後の授業で続きを行うことも考えたが、問題演習等に時間を割かれ、結局行うことはできなかった。しかし、数列の模型化に興味を示した生徒が多く、この授業を行うことで数列に対しての興味・関心を高めることに繋がるのではないかと思った。その結果として、もともと生徒たちの中に潜んでいた数列に対する苦手意識の解消に繋がり、数列の面白さが芽生えてくれるであろうと感じた。

そこで今年度は、昨年度の研究の延長として、いろいろな数列の和の式の模型化を試みた。

2　研究の目標

(1)　模型を利用して数列の和の公式を導くことにより、数列に対しての学習意欲や興味・関心を高め、知的好奇心、根気強く考え続ける力を養う。

(2)　生徒の自主的な活動を取り入れることにより、数列に対しての苦手意識を改善する。

(3)　基本的な概念や原理・法則を体系的に理解し、活用できる力を養う。

3　研究の方法および内容

学校設定科目の「数学探究Ⅱ」の授業を２時間利用し、数列の式についてのアプローチを行った。今年度は、昨年度からの発展で、３乗の和の公式、ｋ（ｋ＋３）の和の式、ｋ（ｋ＋５）　の和の式、ｋ（ｋ＋７）の和の式の模型作りの研究を行った。少人数の講座なので、３グループに分かれて行った。

(1)　　３乗の和の公式

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

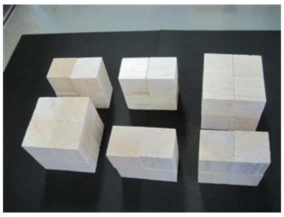
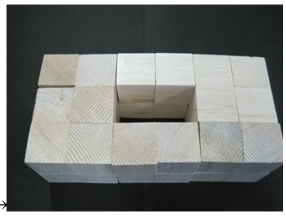
ｋ×ｋ×ｋの立方体４個を次のように分ける。

①　ｋ×ｋ×ｋの立方体を２個

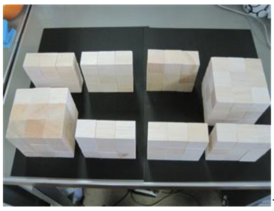
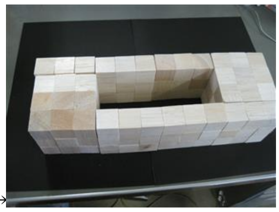
②　ｋ×ｋ×１の直方体を２ｋ個

ア　ｋ＝１の場合は次のようになる。

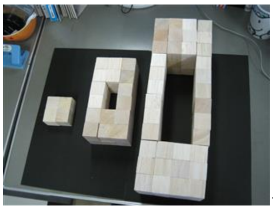
イ　ｋ＝２の場合は次のようになる。

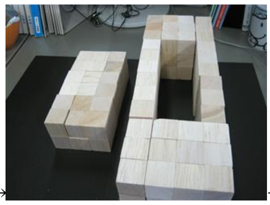

→


ウ　ｋ＝３の場合は次のようになる。


→


ア～ウを組み立てる。


→


→

→


→


結果として、４×12×３＝４×（４×３）×３の直方体が完成する。$4\times(1^3+2^3+3^3)=3^2\times4^2$ より

$1^3+2^3+3^3=\frac{1}{4}\times3^2\times4^2$ となるので、一般化すると、

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ が導き出される。

ｋ（ｋ+３）、ｋ（ｋ+５）、ｋ（ｋ+７）の和の式の模型に関しては、生徒が作成し、ｋ（ｋ+(奇数)）で一般化できないか、考えさせた。

(2)　ｋ（ｋ+(奇数)）の和の式

各グループ、ｎ=２で考察した。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)}$$

ｋ（ｋ+３）の場合、２×３×７の直方体が完成する。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k(k+5)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+8)}$$

ｋ（ｋ+５）の場合、２×３×10 の直方体が完成する。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k(k+7)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+11)}$$

ｋ（ｋ+７）の場合、２×３×13 の直方体が完成する。

ｋ（ｋ+(奇数)）の和の式は、ｋ（ｋ＋１）の和の式を基にした形となっている。

ア　生徒の作品（グループＡ）

（ア）　ｋ（ｋ+３）の和の式

グループＡはｋ（ｋ+１）の形の延長で制作した。図１、図２のように２個の模型に階段模型２個をそれぞれ横に付け、残る１個の模型に階段模型２個を下に付けた。

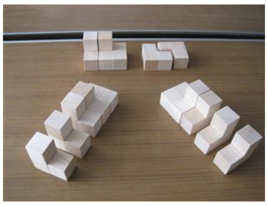


図１

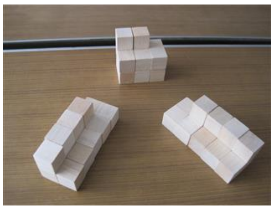
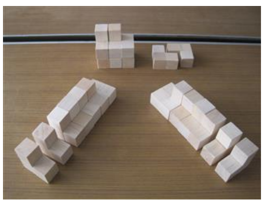
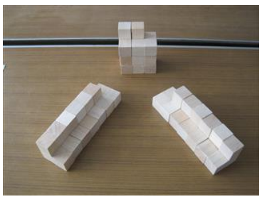


図２

（イ）　ｋ（ｋ＋５）の和の式

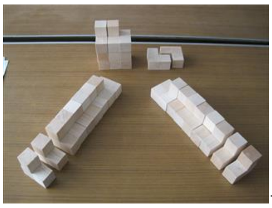
ｋ（ｋ＋３）で作成した模型にそれぞれ（ア）と同じように階段模型を２個ずつ付けた。

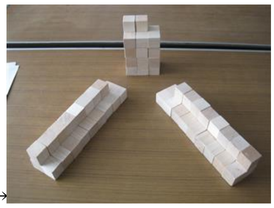




（ウ）　ｋ（ｋ＋７）の和の式

ｋ（ｋ＋５）で作成した模型にそれぞれ（ア）と同じように階段模型を２個ずつ付けた。



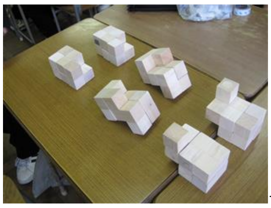


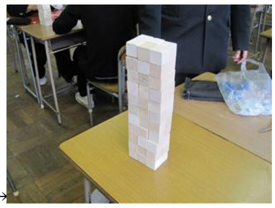
グループＡは、ｋ（ｋ＋３）が完成した時点で、ｋ（ｋ＋５）、ｋ（ｋ＋７）の和の式の模型の完成への道筋が出来上がっていた。他のグループが試行錯誤している中、すぐに模型が出来上がったので、ｋ（ｋ＋２）の和の式の模型を考えてもらった。

（エ）　ｋ（ｋ＋２）の和の式

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)}$$

最初は、ｋ（ｋ＋１）の和の模型を基に考えていたが６個それぞれに k^2 と k に分けて作成した。





ｋ（ｋ＋(偶数)）の和の式に関しての一般化までは、時間の関係上行うことができなかった。今後、時間に余裕があれば、考えさせていきたいと思う。

イ　生徒の作品（グループＢ）

（ア）　ｋ（ｋ+３）の和の式

グループＢは、ｋ（ｋ+１）の模型３個のうち、１個を k^2 と k に分けて、（図３）、図４のように階段模型２個をそれぞれ付けた。

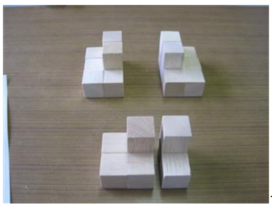


図３

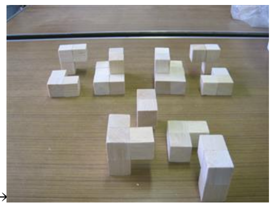
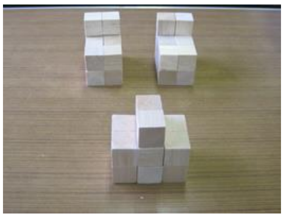
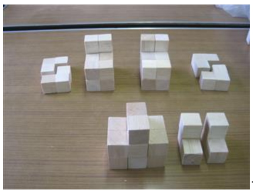
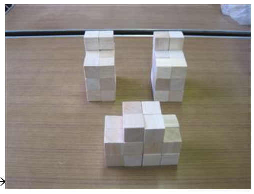


図４



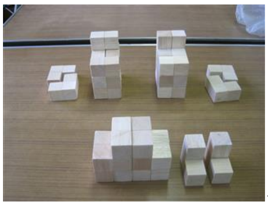
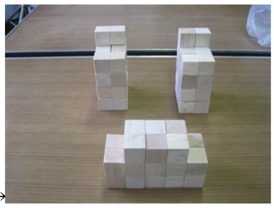
（イ）　ｋ（ｋ+５）の和の式

（ア）と同様に、ｋ（ｋ＋３）の模型の１個を崩して、階段模型２個をそれぞれ付けた。


→


（ウ）　ｋ（ｋ＋７）の和の式

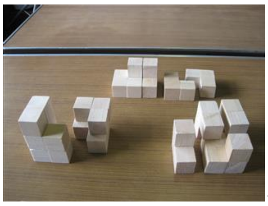
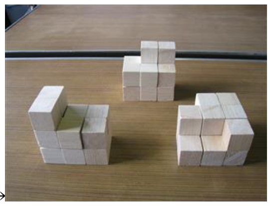
（イ）と同様に、ｋ（ｋ＋５）の模型の１個を崩して、階段模型２個をそれぞれ付けた。


→


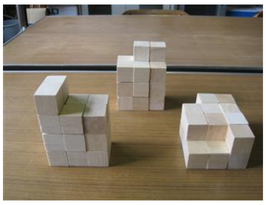
ウ　生徒の作品（グループＣ）

（ア）　ｋ（ｋ＋３）の和の式

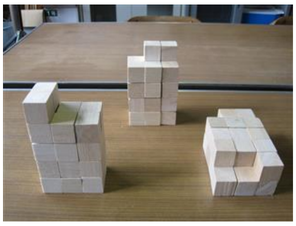
グループＣもグループＢと同様に、ｋ（ｋ+１）の模型３個のうち、１個をk^2とkに分けて、階段模型２個をそれぞれ付けた。


→


（イ）　ｋ（ｋ＋５）の和の式



（ウ）　ｋ（ｋ＋７）の和の式



４　まとめと今後の課題

今回の研究で対象になったクラスは３年生の理系であった。この授業を計画した際に、受験を控えたクラスでこのような受験指導とはかけ離れたことをやってもよいものかどうかという迷いはあった。しかし、実際行ってみると、模型を作成している際の生徒たちの生き生きとした表情や、粘り強く試行錯誤する姿を見て、今回の目標は達成できていると感じた。昨年度もそうだったが、模型を用いた授業を行った後の授業では、集中力や積極性が向上している様子が見られている。

今回の取組で、生徒の実態に合わせて教具やグループ活動を効果的に取り入れることが大切であることを実感した。今後は、数列以外の分野でも、生徒に興味関心を持たせるような授業内容の構築や教材研究を意欲的に行っていきたいと思う。

参考文献

『たのしくわかる数学100時間 新装版』
黒田俊郎他 編著（日本評論社）

『見える数学１』西三数学サークル著（星の環会）

『見える数学２　見て、作って、なるほど数学』
西三数学サークル著（星の環会）