

平方完成・有理化に関する指導法の研究

愛媛県立大洲高等学校 井上 晋二

1 はじめに

本校の1年生において、数学の授業では習熟度別を行っている。私は、1年生の習熟度の高いクラス(40名)と低いクラス(40名)両方を担当している。年度当初、習熟度の高いクラスにおいても、計算ミスが多少見られた。だが、練習を重ねればミスも少なくなった。ところが、授業を進める中で、習熟度の高いクラスにおける課題が見つかった。それは、個々の内容は習得できていても、それらが関連した問題には弱いというものである。

そこで、基礎を定着させた後のこの課題について考察したいと思い、本主題を設定した。

2 研究の動機

年度当初、習熟度の高いクラスにおいて、生徒は授業の内容を理解し、こちらの質問にも十分に答えることができていた。さらに、演習の時間で何度も練習し、できることを確認していた。

その後、1学期の定期考査において、概ねよい成績を取っていたので、根号の計算や2次関数の理解は問題ないと思えた。しかし、次図にあるような単純なミスが少なからずあった。

そこで、計算練習がまだまだ不十分であると思い、平方完成や有理化などの練習を行った。練習の甲斐もあり、ミスも少なくなった。そこで、計算がどの程度正確にできるかを確認するため、模試の過去問から抜粋して解かせることにした。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sqrt{3}(\sqrt{3}+2) - \frac{4}{\sqrt{3}+1} \\
 & = 3 + 2\sqrt{3} - \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\
 & = 3 + 2\sqrt{3} - \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3-1} \\
 & = 3 + 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{3}-1) \\
 & = 3 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 \\
 & = 4 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

問題 1

次の2次式を平方完成せよ。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{6-\sqrt{3}}{4}x^2 + 3x \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left\{ \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 \right\} \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left\{ x - \frac{2(6+\sqrt{3})}{11} \right\}^2 + \frac{3(6+\sqrt{3})}{11}
 \end{aligned}$$

2012年度 駿台模試1年10月

最後まで出来ている生徒は、40名中3名であった。最後のところで、有理化をしていない生徒が9名、約分をしていない生徒が1名いた。大半の生徒は、くくり出したあと、有理化を先に行い計算が複雑になったため、途中であきらめていた。(例1) 他には、2乗の計算を先に行うことで複雑になり、これ以上の計算をやめていた。(例2)

例 1

$$\begin{aligned}
 y & = -\left(\frac{6-\sqrt{3}}{4}x^2 - 3x \right) \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x^2 - \frac{12}{6-\sqrt{3}}x \right) \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x^2 - \frac{12(6+\sqrt{3})}{(6-\sqrt{3})(6+\sqrt{3})}x \right) \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x^2 - \frac{12(6+\sqrt{3})}{33}x \right)
 \end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned}
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left\{ \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{36}{36-12\sqrt{3}+3} \right\} \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left\{ \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{12}{13-4\sqrt{3}} \right\} \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{6-\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{12}{13-4\sqrt{3}} \\
 & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 +
 \end{aligned}$$

中には、例2から計算をして、答えを導き出している生徒がいた。

「問題1」自体、易しくはないが、最後まで到達する生徒がもう少しいると期待していた。

3 研究の目標

- (1) 「問題1」を解くのに大切となる、基本的な内容を定着させる。
- (2) 計算の工夫を理解できるようになる。
- (3) 練習した内容が関連していることを理解し、「問題1」を解くことができるようになる。

4 研究の内容及び方法

「問題1」を解くには、平方完成、有理化といった計算の正確性や、計算の工夫（有理化や2乗の計算は後回しにする）が大切である。計算の正確性は練習の成果もありだといふ向上してきた。そこで、計算の工夫について次のような問題で練習した。

問題2

工夫して計算せよ。

$$(5 - \sqrt{5}) \left(\frac{4}{5 - \sqrt{5}} \right)^2$$

2乗の計算よりも、先に約分をしたほうがよい。これらが定着した後、次のような問題を解かせた。

問題3

次の2次式を平方完成せよ。

(1) $\sqrt{2}x^2 + x$

(2) $(3 - \sqrt{3})x^2 - 2x$

最初は、「問題2」と「問題3(1)」ができれば、「問題3(2)」は解くことができると考えていた。しかし、生徒の解答には「問題2」を使っている気配がなかった。そこで、途中から「問題2」が使えるとヒントを出したが、結果はあまりよくなかった。

「問題3(2)」を最後まで到達した生徒は、40名中5名であった。計算などはあっている、+-の書き間違えをしている生徒が6名いた。

私としては、「問題3(2)」を解く中で、生徒が試行錯誤し、「問題2」に気付くと考えていた。しかし、思うようにはいかなかった。

この原因の一つとして、生徒は、先の見通しをせずに、有理化ができると思えば反射的に有理化を行っているからであると考えた。そのため、「問題2」が利用できることに気付かないのである。

そこで、解説のときに「問題2」を利用するにはどのようにすればよいかと質問し、有理化を後回しにすることに気付かせることにした。

このような「問題2」、「問題3」で練習をさせ、これらが、「問題1」を解くことに関係していることを説明し、数日後、再び生徒に「問題1」を解かせた。

5 研究の結果

その結果、最後まで到達した生徒は、40名中22名となった。正答は得られなかったが、途中まで正しくできている生徒の大半は、くり出しにおけるミスや約分をしていないものであった。

6 考察

生徒は、「問題1」を2度解いているので簡単に比較はできない。しかし、「問題2」の活用法が分かれば、急にできるようになったことに驚きを感じた。解けなかった生徒においても、何度か解きなおさせることで解けるようになってきた。

7 今後の課題

今回は、ポイントを私が説明したが、生徒自身が気付いて自分の力だけで解けるようになってもらいたい。

実は、習熟度の低い生徒にも説明なしで「問題1」を解かせてみた。その結果、2名の生徒が正答を得ていた。大半の生徒は、基礎の再確認から始めた方がよいと思えたのでこれ以上「問題1」には関わらなかった。時期を見て、習熟度の低い生徒にも同じように説明をして、再度「問題1」を解かせてみたいと思う。

8 まとめ

多数の生徒には、「問題1」のような問題ができなかったとしても、授業内容の理解などにはほとんど影響はないと思われる。ただ、本校生徒において、「問題1」が解けた生徒のほとんどが、数学に対して関心・意欲の高い生徒であった。解けなかった生徒にしても、他の生徒にヒントをもらい、とにかく少しずつ自分の力でこの問題を解こうとする姿勢が見られた。

また、生徒と話しをする中で、このように複雑な計算ができたとき、とてもうれしいと言っていた。自分の考えが間違っていなかったこと、苦労の末の結果が正しかったことに面白さを感じている様子であった。

今後は、生徒の躓きやすいところに注意して、よりよい指導方法を研究していきたいと思う。

生徒の解答例

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{12}{6-\sqrt{3}} x \right) \\ & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{6-\sqrt{3}}{4} \right) \\ & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{6}{6-\sqrt{3}} \right) \left(\frac{6-\sqrt{3}}{4} \right) \left(\frac{6-\sqrt{3}}{4} \right) \\ & \therefore \frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{6}{6-\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{9}{6-\sqrt{3}} \\ & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{(6-\sqrt{3})(6+\sqrt{3})}{30-3} \right)^2 + \frac{3(6+\sqrt{3})}{30-3} \\ & = -\frac{6-\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{12+\sqrt{3}}{11} \right)^2 + \frac{18+3\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$