

# 三角比の指導法の研究

愛媛県立八幡浜高等学校 増田 稚子

## 1 はじめに

数学を学習する中で、図形の性質を使って問題を解くことは多い。平面図形の単元のみならず、図形の見方を変えることで、問題を容易に解くことができることもある。図形の性質を数量的に取り扱う場合、線分の長さや角の大きさを基本にして考えるが、数学Ⅰの「図形と計量」で学ぶ三角比や数学Ⅱの「三角関数」で学ぶ三角関数がこれらの2つのものを結びつける働きをする。しかし、そのためには図形の性質を学び、理解することが不可欠である。様々なものを見方ができる方が思考はより深まっていく。

三角比は、図形に関連した様々な計算を行うために重要な分野である。生徒にとっては、なじみのない分野であるため日常生活に関連付けて概念を導入することが多いが、その良さを理解するには時間がかかるように思われる。三角比を用いて考える良さを理解することは、物理学や工学、他の分野でも重要であり、その有用性を理解して欲しい。そのためには、図形の見方や捉え方、解法の見通しなどを、生徒自身が考えられるようにならなければならない。生徒が自学自習できる学習教材を作成することで、家庭学習の質を高められるのではないと考え、この主題を設定した。

## 2 研究の目標

- (1) 授業で使用している補助教材の問題を用いて、ワークシートを作成する。
- (2) 生徒の自学自習として利用させる。
- (3) テストを行い、生徒の理解度を確認する。また、生徒に感想を聞き、理解を深めることができたかを確認する。

## 3 研究の内容

- (1) ワークシートを作成する

本校の普通科第1学年では、補助教材として数研出版の『クリアー 数学Ⅰ+A』を使用している。授業の進度に応じて日々の課題や定期考査の出題範囲として利用している。今回、多くの生徒がつまずきやすいと思われる問題を選び、ワークシートを作成した。選んだ問題の内容は、円に内接する四角形、内接円の半径、空間図形、内接球など、全部で5題である。問題1問ごとに1枚のワークシートを作成した。内容は、〈考え方〉、〈解答の手順〉、〈解答〉、〈類題〉の4つである。

〈考え方〉は、問題の見通しや図形の捉え方をまとめ

たものである。このとき、図形の捉え方を変えることで式の立て方や使う公式が変わることに気付かせた。特に、体積を求める問題では底面と高さとの関係を理解させることが重要であると考えた。

〈解答の手順〉は、解答の流れを簡単にまとめたものである。順を追って求めていくと答えに結びつくようにした。図形の性質を用いると容易に考えることができることもあるが、今回は基本的な解法の流れを大切にし、考えが定着するように心掛けた。

〈解答〉は、〈解答の手順〉で示した流れを穴抜きの形で示したものである。手順と穴抜きで示した文章や式の後から、求める値や公式を確認させた。

〈類題〉は、問題を理解したときの練習問題として、また、実力を付けたいときの問題として提示したものである。

- (2) 生徒の自学自習として利用させる

授業でも使用している問題集の問題であるので、生徒が家庭学習などで自身の考えを深めるために利用して欲しいと考えて作成をした。そのため、生徒の理解度に応じて使用方法を変えることができるように工夫した。

例えば、習熟度の高い生徒の場合、考え方は理解できており、逆に穴抜きの形の解答では考えづらいと感じるときもある。その場合は〈考え方〉を見て、自身の考え方が間違っていないかを確認し、〈類題〉を解くことで実力をつけることができる。問題によっては、穴抜きの解答は使わずに、〈解答の手順〉を追って、自身で解答をしていくこともできる。

数学が苦手な生徒の場合、問題の見通しを理解することが重要である。まずは、〈考え方〉と〈解答の手順〉をしっかりと理解してから穴抜きを埋めていき、解くことができたという実感を身に付けさせる。何度か練習をして、手順を見ながら自身で解答することができるようになるためのモデルとすることもできる。

- (3) テストを行い、生徒の理解度を確認する

テストを実施し、生徒の理解度を確認する。ただ解くことができるだけでなく、論理的な解答ができていないか、相手に伝わるような解答ができていないかを確認する。

また、生徒にワークシートについての感想を聞き、どのように利用したのか、参考になった点などを確認する。

#### 4 研究の成果と今後の課題

今回の研究は、生徒の家庭学習の充実と自学自習として利用させることを目的として行った。補助教材の問題は一度授業で扱った問題が多く、考査などの勉強で役立てて欲しいと考えたからである。図形の問題は、様々な問題を通していろいろな考え方があることを知り、理解することを繰り返していくことが大切であると考えている。そのための一つの道しるべとしてワークシートを利用し、家庭学習を充実させて欲しいと考えた。実際に、ワークシートを利用しての感想を聞くと、それぞれが自身の理解度に応じてワークシートを利用していたことが分かった。

ワークシートを利用した生徒の感想は、次のようであった。

##### <生徒の感想>

- ・答えまでの流れが分かりやすくてよかった。
- ・答えを見ただけだと分かりにくいけれど、ワークシートは言葉の説明が入っているので、解いていく順序が分かって、問題を理解することができた。
- ・1つ1つのポイントがあるので、分かりやすかった。穴抜きで進めてくれるので、解けるという自信がついた。
- ・類題もあって復習になった。類題を解くことで、自分がしっかりと理解できたか確かめられた。
- ・考え方がよく分からなかったなので、ワークシートを見てよく分かった。自分の考え方で不安な所の理解が深まったので良かった。
- ・どこを求めるために、どのような計算をするのかを実際に解いて身に付けることができた。分からなくなっても表を見て、考え方や手順を見て、自分で解くことができた。

ほぼ全員の生徒が利用していて、家庭学習の手助けとなったと答えていた。理解度に応じてワークシートを利用していた様子も感じられた。特に、<類題>があることで理解できているかを確認できたり、実力を付けたりすることができたので良かったとの意見が多く見られた。また、授業での演習の時間に、配布したワークシートを利用してもよいと指示すると、多くの生徒が積極的にワークシートを利用して問題を考えていた。図形問題が苦手な生徒が友達に考え方を質問する場面が多く見られ、その友達に説明をしている生徒も、ワークシートの手順を参考にしながら、的確な説明をしていた。そのやりと

りを見ていると、相互に理解が深まっている様子が伝わってきた。

テストの結果は、半数ほどの生徒が正答しており、一定の成果を感じた。特に、内接円の半径に関する問題は、公式や考え方が多くの生徒に定着していた。また、空間図形でも、これまで図形の扱いがよく分からないと十分に解答できていなかった何人かの生徒が、最後まで解答することができていた。中でも、体積を利用して空間図形の高さを求める問題の正答率が上がっていた。

今後の課題は、利用することができるワークシートもまだ少ないため、このようなワークシートを少しずつ増やしていくことである。生徒の意見の中には、他の単元でも作成して欲しいという声があり、分野や内容によって生徒のつまづきやすい問題や理解が深まる場合にはワークシートを作成し、活用していきたいと考えている。

##### <参考文献>

- ・『新課程 教科書傍用 クリアー 数学 I + A』  
(数研出版)
- ・『新課程 教科書傍用 3 TRIAL 数学 I + A』  
(数研出版)

<ワークシートの内容・表>

三角比の演習 No.1 クリアー p.73 301 円に内接する四角形  
 円に内接する四角形ABCDがあり、AB=1、BC=2、CD=3、DA=4の  
 とき、次のもの求めよ。

- (1)  $\cos A$  の値 (2) 四角形ABCDの面積S

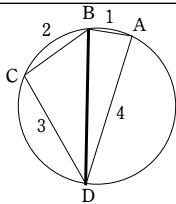
<考え方>

- 四角形（多角形）の面積は三角形に分割する。
  - 三角形の面積は  $S = \frac{1}{2}bc\sin A$  を用いる。  
 →  $\sin A$  の値が必要！
  - 円に内接する四角形の対角の和は $180^\circ$   
 →  $\angle A + \angle C = 180^\circ$  より、 $\angle C = 180^\circ - \angle A$   
 →  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ 、 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$  より  
 $\cos C = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$ 、  
 $\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$
- i) 余弦定理より、 $BD^2$  を2通りの式で表せる。  
 ii)  $BD^2$  の式から、 $\cos A$  の値を求める。  
 iii)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  より、 $\sin A$  の値を求める。

<解答の手順>

- (1)  $\cos A$  の値

- ◎ 図をかく。  
 対角線BDを引いて、  
 四角形を2つの三角形に  
 分割する。



- ①  $\triangle ABD$ において、余弦定理を用いて $BD^2$ を表す。  
 ②  $\triangle BCD$ において、余弦定理を用いて $BD^2$ を表す。  
 ③ ①、②より、 $\cos A$  の値を求める。

- (2) 四角形ABCDの面積S

- ①  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  より、 $\sin A$  の値を求める。  
 ②  $\triangle ABD$ において、三角形の面積を求める。  
 ③  $\triangle BCD$ において、三角形の面積を求める。  
 ④  $S = \triangle ABD + \triangle BCD$  を計算する。

<解答>

- (1) 対角線BDを引く。

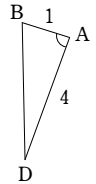
①  $\triangle ABD$ において、余弦定理を用いて $BD^2$ を表す。

$\triangle ABD$ において、余弦定理より

$$BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2 \cdot AB \cdot DA \cdot \cos A$$

$$= \square^2 + \square^2 - 2 \cdot \square \cdot \square \cdot \cos A$$

$$= \square \dots \textcircled{0}$$



②  $\triangle BCD$ において、余弦定理を用いて $BD^2$ を表す。

$\triangle BCD$ において、余弦定理より

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos C$$

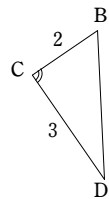
$$= \square^2 + \square^2 - 2 \cdot \square \cdot \square \cdot \cos C$$

四角形ABCDは円に内接するから、

$$\cos C = \cos(180^\circ - A) = \square$$

よって、

$$BD^2 = \square \dots \textcircled{0}$$



③ ①=②より、 $\cos A$  の値を求める。

①、②より

$$\square = \square$$

$$\therefore \cos A = \square \dots (\text{答})$$

- (2) ①  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  より、 $\sin A$  の値を求める。

(1)より、 $\cos A = \square$ 、 $\sin A > 0$ だから、

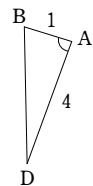
$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \square$$

②  $\triangle ABD$ において、三角形の面積を求める。

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DA \cdot \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \square \cdot \square \cdot \square$$

$$= \square \dots \textcircled{0}$$



③  $\triangle BCD$ において、三角形の面積を求める。

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \cdot \sin C$$

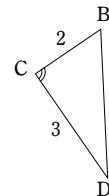
$$= \frac{1}{2} \cdot \square \cdot \square \cdot \sin C$$

四角形ABCDは円に内接するから、

$$\sin C = \sin(180^\circ - A) = \square$$

よって、

$$\triangle BCD = \square \dots \textcircled{0}$$

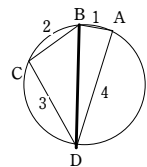


④  $S = \triangle ABD + \triangle BCD$  を計算する。

①、③より、

$$S = \square + \square$$

$$\therefore S = \square \dots (\text{答})$$



<ワークシートの内容・裏>

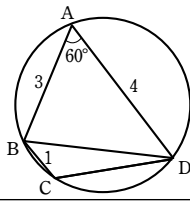
類題 円に内接する四角形

円に内接する四角形 ABCD において、

$$\angle A = 60^\circ, AB = 3, BC = 1, DA = 4$$

のとき、次のものを求めよ。

- (1) 線分 BD の長さ
- (2) 線分 CD の長さ



円に内接する四角形 ABCD があり、 $AB=2, BC=4, CD=3, DA=2$ である。次のものを求めよ。

- (1) 対角線 AC の長さ
- (2) 四角形 ABCD の面積 S

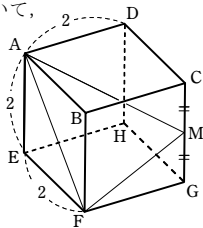
[数研出版 3 TRIAL 数学 I + A より]

<ワークシートの一部>

三角比の演習 No.3 クリアー p.76 313 空間図形への応用

1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH において、  
辺 CG の中点を M とする。

- (1) 線分 AF, AM, FM の長さを求めよ。
- (2)  $\angle FAM$  の大きさを求めよ。
- (3)  $\triangle AFM$  の面積を求めよ。



<考え方>

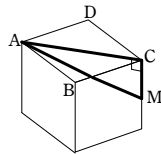
○ 空間図形の問題は、平面図形（三角形）を取り出して考える。

○  $\triangle AFM$  を考えて、AF, FM, AM を求める。  
そのため、線分 AF, AM, FM が含まれる平面を考える。

→ 線分 AF は、正方形 AEFB の対角線。

→ 線分 AM は、図形の内部を通っているため、補助線 AC を引くと、 $\triangle ACM$  は直角三角形であり、線分 AM は斜辺。

→ 線分 FM は、直角三角形 FGM の斜辺。



○  $\boxed{\text{3辺の長さ}} \rightarrow \boxed{\cos A} \rightarrow \boxed{\angle A \text{の大きさ}}$   
余弦定理 ↑ が求められる。

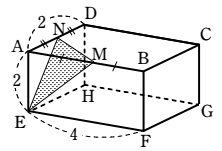
○ 三角形の面積は  $S = \frac{1}{2}bc\sin A$  を用いる。

→  $\sin A$  の値（もしくは、 $\angle A$  の大きさ）が必要！

三角比の演習 No.4 クリアー p.76 314 空間図形への応用

右の図のような、 $AD=2, AE=2, EF=4$  である直方体 ABCD-EFGH において、辺 AB, AD の中点を、それぞれ M, N とする。

- (1)  $\triangle EMN$  の面積を求めよ。
- (2) A から  $\triangle EMN$  に下ろした垂線の長さを求めよ。



<考え方>

○ 空間図形の問題は、平面図形（三角形）を取り出して考える。

○  $\triangle EMN$  を考えて、EM, MN, NE を求める。  
そのため、線分 EM, MN, NE が含まれる平面を考える。  
(クリアー 313 を参考)

○ 三角形の面積は  $S = \frac{1}{2}bc\sin A$  を用いる。  
→  $\sin A$  の値が必要！

○  $\boxed{\text{3辺の長さ}} \rightarrow \boxed{\cos A} \rightarrow \boxed{\sin A}$  と計算できる。  
余弦定理 ↑  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

○ 垂線は、面積や体積を求めるときの高さとなるため、重要である。  
また、体積はどの三角形を底面として考えるかが Point!

A から  $\triangle EMN$  に下ろした垂線を AH とする。  
 $\triangle AMN$  を底面とすると、AE が高さ  
 $\triangle EMN$  を底面とすると、AH が高さ  
→ 体積を 2通りの式で表して計算する。

<解答の手順>

(1)  $\triangle EMN$  の面積を求めよ。  
直角三角形に注目し、三平方の定理を用いて計算する。

① 線分 EM, MN, NE を求める。

②  $\triangle EMN$  において、余弦定理を用いる。

③  $\sin^2 \angle NEM + \cos^2 \angle NEM = 1$  より、 $\sin \angle NEM$  の値を求める。

④ 三角形の面積  $\triangle EMN = \frac{1}{2} \cdot EN \cdot EM \sin \angle NEM$  を求める。

(2) A から  $\triangle EMN$  に下ろした垂線の長さを求めよ。  
A から  $\triangle EMN$  に下ろした垂線を AH、四面体 AEMN の体積を V とする。

①  $\triangle AMN$  を底面、AE を高さとして、体積 V を求める。

②  $\triangle EMN$  を底面、AH を高さとして、体積 V を求める。

③ ①、②より、AH の長さを求める。