場合の数・確率の指導法の研究

愛媛県立松山西中等教育学校　矢埜　強

１　はじめに

本校は中高一貫校であり、１学年４クラスの６学年で編成されている。数学おいては、第１学年を除いた５学年で習熟度別講座に分かれて授業を実施している。私は今年度第２学年（中学２年生）の学級担任をしており、授業では第２学年と第６学年（高校３年生）を担当している。国公立の難関大学を希望する生徒も多いため、レベルの高い内容を取り扱っている。しかし、学年が上がるごとに授業についていくのも難しい生徒も増えてきているのも事実である。中学２年生で確率を教える中で、より高校生には確率を求める際に様々な計算方法の便利さを実感し、その定着を図って欲しいと考える。そのためにも場合の数・確率の分野において､生徒が苦手としている問題の傾向を考察し、一人でも多くの生徒が場合の数・確率への関心を高めて欲しいと願い、本主題を設定した。

２　中学２年生での確率の学習内容

中学２年生では、確率の必要性と意味を理解し、確率を用いて不確定な事象を考察し表現することを目標としている。生徒の多くは、「確率」ということばを、天気予報の降水確率や、選挙の当選確率などで聞いたことがある。しかし、その数値の意味を問うと、正確に答えられる生徒は少ない｡「100本のうち23本があたりのくじである箱Ａと150本のうち 34 本があたりのくじである箱Ｂがあります。あたりを引くには、あなたはどちらの箱からくじを引きますか」という質問をすると、クラスの 80%程度の生徒はＢの箱と答えた。以下が中学２年生で学ぶ内容である。

(1)　確率の定義：あることがらの起こることが期待される程度を表す数

(2)　同様に確からしいことの意味

(3)　確率の求め方

> 起こる場合が全部で n 通りあり、そのどれが起こることも同様に確からしいとする。
> そのうち､ことがらＡが起こる場合が a 通りであるとき、
>
> ことがらＡが起こる確率　$p=\dfrac{a}{n}$

(4)　表や樹形図を用いて場合の数を数える

(5)　確率の範囲

> あることがらの起こる確率 p とするとき、
>
> $0 \leqq p \leqq 1$

(6)　Ａの起こらない確率の求め方

> ことがらＡの起こる確率を p とすると、
>
> Ａの起こらない確率＝$1-p$

中学２年生においては、起こりうる場合の数を、表に整理したり、樹形図に表したりして数え上げ、それをもとに確率を求めていく。場合の数を求めるときに、生徒の中には、樹形図を書く場合に見落としがあったり、面倒くさがる者もいた。高校数学で順列や組合せを学んでいる自分にとっては指導上やりづらさを感じてしまう場面が多かったように思われる。高校では場合の数や確率を求める際には計算を用いて求めていくということを伝えると、興味・関心を抱く生徒が数多くいた。

３　生徒が苦手・勘違いしやすい基礎・標準問題の分析

> 問題　８人の中から，委員長、副委員長、書記の各１人選ぶ方法は何通りあるか。

順列・組合せにおける基礎的な問題であるが、勘違いしやすいところでもある。生徒は問題を見て、選ぶという言葉だけを受け入れて組合せ $_{n}C_{r}$ をすぐに使ってしまう生徒もいる。数学が苦手な生徒はすぐ公式に頼ってしまう傾向がある。そのことがらを決定するためには、ただ選ぶだけでは役職が決定しないことを確認し、役職を決定するためにはどうすればよいかを考える必要がある。順列 $_{8}P_{3}$ を使う一方で $_{8}C_{3}\times 3!$ を利用して解くように指導してもよいと考える。

> 問題　水，お茶，スポーツドリンクの３種類の飲み物を売っている自動販売機で，６本の飲み物を購入する。購入しない飲み物があってもよいものとすると，購入の組合せは何通りあるか。

重複組合せの問題である。授業で学んだ際はある程度の生徒が理解をしているが、時がたって問題に取り組んでみると解けない生徒が多数であった。$_{3}H_{6}={}_{3+6-1}C_{6}$ を用いて解くことができるが、ここではしっかりと考え方を定着させることが大切である。生徒は３種類の飲み物があるということばかりに気をとられている。ここでは６本の飲み物○○○○○○を２本の区切り線で３つの部分に区切る。

左側を水、真ん中をお茶、右側をスポーツドリンクとして考えるやり方を定着させることがこの問題を確実に解く鍵となる。生徒の解答では６個の○と２個の｜を１列に並べる順列で解く生徒が多かった。順列を用いたほうが生徒には分かりやすいようであった。少なくとも１本は購入しなければならない場合は１本ずつ確保しておいて、残りの３本の飲み物○○○を２本の区切り線で３つの部分に区切る方法で解けばよいとあわせて指導しておくとよい。

> 問題　10 人がＡまたはＢの２部屋に入る方法は何通りあるか。ただし，１人も入らない部屋があってもよいものとする。

重複順列の簡単な問題である。しかし数学が苦手な生徒の中には重複順列 n^r を用いて $10^2=100$ と解答する者もいた。きちんとその問題をイメージし､｢人が部屋を選ぶ｣という考えを持たせる。最初の人はＡかＢの２通りの選び方がある。次の人も最初の人と同じ部屋に入ってもよいし、別の部屋でもよいので２通りの方法があり重複順列である。そう考えると $2\times 2\times \Lambda \times 2=2^{10}$ という考えが出てきて生徒は勘違いしない。 n^r という公式を安易に出さず、地道に問題をイメージして考える方が良いと考える。

> 問題　２つのさいころを同時に投げるとき，出た目の最大値が４となる確率を求めよ。

「最大値が４以下」となる確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^2$ 、「最大値が３以下」となる確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^2$ となるので､「最大値が４」となる確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^2-\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{7}{36}$ で求めることができる。ただしここではあえてまず場合分けをして生徒に解かすことにした。一方で４の目が出て、もう一方で３以下の目が出るとき、その確率は $\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}\times 2=\frac{6}{36}$ 、２回とも４の目が出るとき、その確率は $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ となる。よって求める確率は $\frac{6}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$ となる。しかし、この方針だとさいころの数が増えるにつれて場合分けが面倒になる。よって最初に示した方法で解くと良いと生徒に指導すると、より生徒には解法がしっかり定着したように感じた。

> 問題　ある試合で A が B に勝つ確率は一定で $\frac{1}{3}$ である。
> この２人が試合をし，先に３勝した方を優勝とする。引き分けはないものとして、４試合目にＡの優勝が決まる確率を求めよ。

反復試行の標準的な問題である。しかし勘違いしやすい問題でもある。４試合で３勝すればよいという勘違いから ${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)$ という解答をする者もいる｡そこでまずは試合の進行パターンを考えさせる。

１試合目	２試合目	３試合目	４試合目
×	◎	◎	◎
◎	×	◎	◎
◎	◎	×	◎
~~◎~~	~~◎~~	~~◎~~	~~×~~

※Aが勝つ・・・◎　Ａが負ける（Bが勝つ）・・・×
進行パターンの表を作ることにより、すべて３勝１敗であるが、４試合目は必ずＡが勝たなければならないことがより定着させることができる。またこの表により３試合目までの成績は２勝１敗であることが一目で分かり生徒は勘違いすることなく ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)$ と解くことができた｡しかし４試合目にＡが勝つ確率 $\frac{1}{3}$ をかけ忘れる生徒がいるので注意する必要がある。

４　まとめ

中学２年生で確率を指導してみて、樹形図を書いて場合の数や確率を求める解法の手間と時間がかかることを改めて感じることができた。それと同時に高校生で学ぶ順列や組合せ、確率の求め方がいかに速く解けて便利であるかを感じることができ、生徒たちには高校においてしっかりと学習内容の定着を図って欲しいと思った。場合の数や確率は生徒にとって身近に感じやすい学習内容であるが、苦手な生徒にとっては基本的な問題がしっかり理解できていない者も多い。そのためにも生徒がつまずきやすい問題を分析し、生徒にとって分かりやすい指導方法を今後も研究していきたい。