二元一次不定方程式の解答の記法についての研究

愛媛県立西条農業高等学校　大　石　幸太郎

１　はじめに

本校には、学習全般に対して苦手意識を持っている生徒が多く、特に数学に対する苦手意識はきわめて強い。したがって、内容を精選すること、授業の進め方について工夫すること、解ける喜びを実感させて自信をもたせることなどを通して、興味・関心をもって意欲的に学習に取り組ませることは非常に重要であり、平素からこれらを心掛けて教材研究や授業を行っている。しかし、実際は低学力層の生徒が多く在籍する本校においては、解ける喜びを感じられる問題は、簡単な計算問題であり、二元一次不定方程式のような解答が数行にわたる記述式の問題ではない場合が多い。

今回の研究は、数学Ａで現行課程から新しく取り扱われている「整数の性質」のうち、ユークリッドの互除法と二元一次不定方程式の解答のかき方を統一することで問題を解かせ、理解が深めることを目指した実践の報告である。

２　本校での「数学Ａ」の履修の状況

次表のとおり、本校では就職類型の２年生の生徒が数学Ａを履修することになっており､昨年度から現行課程の「数学Ａ」の授業が行われている。比較的数学の得意な生徒は進学類型を選択しており、苦手意識の強い生徒が数学Ａを履修している。

	１年生	２年生	３年生
進学類型	数学Ⅰ ３単位	数学Ⅱ ２単位	数学Ⅱ ２単位
就職類型		数学Ａ ２単位	

数学Ａの履修内容については、学習指導要領で次のように説明されている。

> この科目は，中学校数学の内容を踏まえ「数学Ⅰ」の内容等を補完するとともに，事象を数学的に考察する能力を養い，数学のよさを認識できるようにするため,「(1) 場合の数と確率」,「(2) 整数の性質」及び「(3) 図形の性質」の三つの内容で構成した。従前の「数学Ａ」とは異なり，生徒の実態等に応じて三つの内容からその内容を適宜選択して履習させることとした。すなわち，これらの内容のすべてを履修させるときは３単位程度を要するが，標準単位数は２単位であり，生徒の実態や単位数等に応じて内容を適宜選択させることとしている。『高等学校学習指導要領解説編』

一方、2010 年 11 月に実施されたベネッセコーポレーション進度調査アンケートでは次表のような結果が出ており、現行教育課程の数学Ａを履修する生徒の 60％以上の者が「整数の性質」について学習している。

数学Ａ（選択履修）の履修分野数

３つ全部履修	56.7%
「場合の数と確率」「整数の性質」	7.0%
「場合の数と確率」「図形の性質」	14.5%
「場合の数と確率」	1.5%
未定・検討中	10.3%

『VIEW21 高校版 2011 年度 2 月号』

本校でも教科書に沿って、すべての内容を学ばせることにしており、「整数の性質」は３学期に学習している。

３　ユークリッドの互除法の表記方法について

本校で使用している教科書(「新高校の数学Ａ」(数研出版))では、ユークリッドの互除法を用いて 247 と 221 の最大公約数を求める問題が例題として扱われている。その計算部分は次のように順にわり算を進めていく形で書かれており、余りが 0 となる最後の計算の割る数が最大公約数となると解説されている。

$$\begin{array}{r} 1 \\ 221\overline{)\,247} \\ \underline{221} \\ 26 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 26\overline{)\,221} \\ \underline{208} \\ 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 13\overline{)\,26} \\ \underline{26} \\ 0 \end{array}$$

しかし、この書き方では割り算を繰り返し行うことはわかるが、記述やスペースにロスが多い。いくつかの参考書やインターネットで調べると、次のような記法があることが分かった。ここでは 408 と 595 の最大公約数を求める計算で比較する。

(1)　筆算でわり算を行い余りが 0 になるまで繰り返す記法

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 17\,) & \overline{34}\,) & \overline{187}\,) & \overline{408}\,) & \overline{595} \\ & \underline{34} & \underline{170} & \underline{374} & \underline{408} \\ & 0 & 17 & 34 & 187 \end{array}$$

この方法は割り算を繰り返し行うことのイメージがわきやすい、余りが次に行う計算の割る数になっていることから互除のイメージがわきやすいなどのメリットがある。

ただし、右から計算を進めていくので、少々違和感を感じる者がいた。

(2)　左右に並べてかく方法

2	408	595	1
	374	408	
2	34	187	5
	34	170	
	0	17	

④408÷187 の商

⑤187×2

⑥408－(187×2)

①595÷408 の商

②408×1

③595－(408×1)

⑦くり返し

この方法は（1）よりもさらに互助のイメージがわきやすい。また、計算が下に進んでいくのでノートにかきやすい。

(3)　分数の形でかく方法

$$\frac{595}{408} \Rightarrow \frac{408}{187} \Rightarrow \frac{187}{34} \Rightarrow \frac{34}{17} \Rightarrow 0$$

分母を次の分数の分子へ、余りを次の分数の分母として割り切れるまで繰り返し、割り切れた手前の分数の分母が最大公約数となる。割り算の計算を別の場所で行わなければならず、修得には練習が必要である。慣れると、分子から分母を引けなくなるまで引くことで余りを求めることができる。

以上の記法を生徒に示したところ、生徒の多くは(1)が最もわかりやすいということで、この方法で統一することにした。

4　二元一次不定方程式の答案について

本校が採用している教科書では、二元一次不定方程式を解く手順は次のように解説されている。

① a，b，c を整数とする。方程式 $ax+by=c$ を満たす整数 x，y の組の 1 つがわかれば、それを利用して、すべての組を求めることができる。

② 整数 a と b に共通な素因数がないとき、方程式 $ax+by=1$ を満たす整数 x，y の組は必ず存在する。

③ 互除法を用いるとその組を見つけることができる。

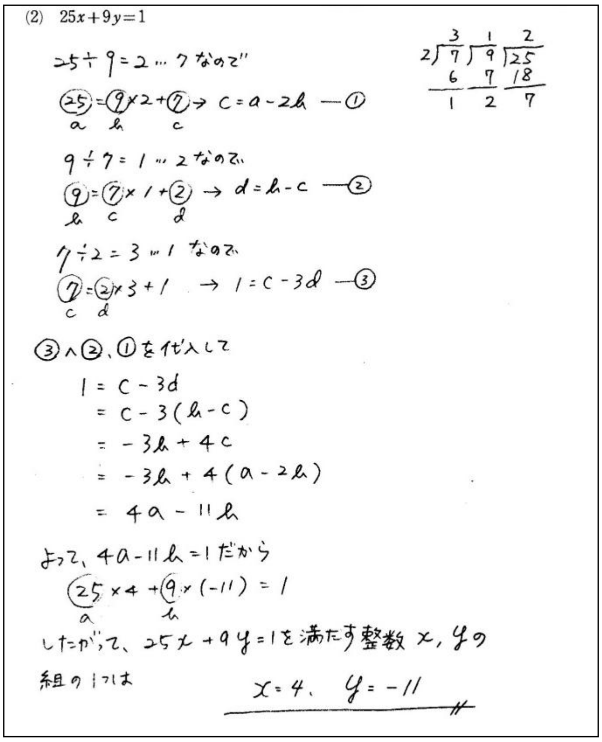
実際に例 6 では方程式 $30x+13y=1$ を満たす整数 x,y の組を次のように求めている。

30＝13×2＋4　　　……①
13＝4×3＋1　　　……②
②から　1＝13－4×3　……③
①から　4＝30－13×2
これを③に代入すると
1＝13－(30－13×2)×3
＝13－30×3＋13×6
＝30×(－3)＋13×7
よって　30×(－3)＋13×7＝1
したがって、方程式 $30x+13y=1$ を満たす整数 x，y の組の 1 つは $x=-3$，$y=7$

しかし、このような整数のみを用いた式変形は生徒にとっては大変困難なものである。その理由は明解で、どの値を残して、どこを整理していけばいいのかがわからない、そもそも、なぜ簡単な四則演算である和や差、積を計算せずに残しておくのかがわからないというものであった。

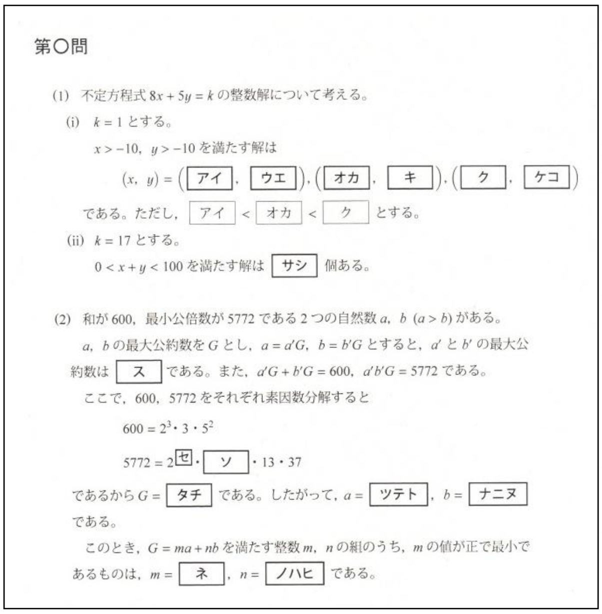
そこで、この問題の目標は $30x+13y=1$ を満たす x と y の組を 1 つ見つけることであるので、最終的に x と y には具体的な値が入ることから、37 を a, 13 を b, $a \div b$ の余りを c, $b \div c$ の余りを d、…と考え、互除法で余りが 1 になれば「$1=\bigcirc a+\square b$」となるように式変形すればよいと結論付け、問題を解説した。

この方法を解説すると、小テストでの生徒の正答率は著しく向上した。次は別の問題ではあるが実際の生徒の答案である。


(2) $25x+9y=1$

25÷9＝2…7なので
$\underset{a}{25}=\underset{b}{9}\times2+\underset{c}{7} \rightarrow c=a-2b$ —①
9÷7＝1…2なので
$\underset{b}{9}=\underset{c}{7}\times1+\underset{d}{2} \rightarrow d=b-c$ —②
7÷2＝3…1なので
$\underset{c}{7}=\underset{d}{2}\times3+1 \rightarrow 1=c-3d$ —③
③へ②、①を代入して
$1=c-3d$
$=c-3(b-c)$
$=-3b+4c$
$=-3b+4(a-2b)$
$=4a-11b$
よって、$4a-11b=1$だから
$\underset{a}{25}\times4+\underset{b}{9}\times(-11)=1$
したがって、$25x+9y=1$を満たす整数 x, y の組の1つは $x=4$、$y=-11$

この方法をマスターすれば、次の大学入試センターが平成 25 年 11 月に公表した数学Ａの「整数の性質」の問題例の最終問題の解答である $\boxed{ネ}$ $\boxed{ノハヒ}$ を求めることができる。


第〇問

(1) 不定方程式 $8x+5y=k$ の整数解について考える。

(i) $k=1$ とする。

$x>-10$，$y>-10$ を満たす解は

$(x,\ y)=(\boxed{アイ},\ \boxed{ウエ}),(\boxed{オカ},\ \boxed{キ}),(\boxed{ク},\ \boxed{ケコ})$

である。ただし，$\boxed{アイ}<\boxed{オカ}<\boxed{ク}$ とする。

(ii) $k=17$ とする。

$0<x+y<100$ を満たす解は $\boxed{サシ}$ 個ある。

(2) 和が 600，最小公倍数が 5772 である 2 つの自然数 a，b $(a>b)$ がある。

a，b の最大公約数を G とし，$a=a'G$，$b=b'G$ とすると，a' と b' の最大公約数は $\boxed{ス}$ である。また，$a'G+b'G=600$，$a'b'G=5772$ である。

ここで，600，5772 をそれぞれ素因数分解すると

$600=2^3\cdot3\cdot5^2$

$5772=2^{\boxed{セ}}\cdot\boxed{ソ}\cdot13\cdot37$

であるから $G=\boxed{タチ}$ である。したがって，$a=\boxed{ツテト}$，$b=\boxed{ナニヌ}$ である。

このとき，$G=ma+nb$ を満たす整数 m，n の組のうち，m の値が正で最小であるものは，$m=\boxed{ネ}$，$n=\boxed{ノハヒ}$ である。

5　研究のまとめと課題

答案のかき方を統一し、パターン化することで、生徒が

正答にたどり着く確率を高められることは既に明らかであり、そのことが数学Ａの「整数の性質」の単元でのユークリッドの互除法や二元一次不定方程式にも当てはまることが確かめられた。本校の多くの生徒は学力面では県内でも低位に属していると言わざるを得ないのが現状ではあるが、そのような生徒でも時間をかけて丁寧に考え方や記法を確認するなど、取り扱い方を工夫することによって、大学入試センター試験レベルの問題にまで挑戦させられることが確認できたことは大変有意義である。

　ただし、学習指導要領解説にはユークリッドの互除法の内容と内容の取扱いについて次のように記されている。

> ３　内容と内容の取扱い
> (２)整数の性質
> イ　ユークリッドの互除法
> 　整数の除法の性質に基づいて, ユークリッドの互除法を理解させ, 二つの整数の最大公約数を求められるようにする。指導に当たっては，具体例を通して，その手順の持つ意味を理解させることに重点を置き, 単なる計算練習に陥らないよう留意することが大切である。
> 　二元一次不定方程式の解の意味について理解し, 未知数の係数の最大公約数が 1 であるような簡単な場合について, その解を求めることができるようにする。解を求めるに当たっては，ユークリッドの互除法を活用し, その方法については具体例を通して理解させるようにする。

　今回の実践は、計算し正解にたどり着くことに主眼を置いた「単なる計算の練習」と言われても仕方のないものである。今後は計算の練習の域を超え、計算やその手順の意味を考えさせ理解させることに重心をシフトさせる必要があると感じている。

参考文献・引用文献

山﨑昌樹（2012)『VIEW21 高校版 2011 年度 2 月号』ベネッセ教育総合研究所

文部科学省(2009)『高等学校学習指導要領解説　数学編理数編』実教出版

秋山仁ほか(2013)『新高校の数学Ａ』数研出版

文部科学省ＨＰ「平成 27 年度からの大学入試センター試験における数学、理科の問題例（試作問題）の公表について」(http://www.dnc.ac.jp/center/shiken_jouhou/）より抜粋（参照日：2014 年 11 月 11 日）

矢野健太郎(1996)『モノグラフ公式集５訂版』科学新興新社

チャート研究所(2011)『新課程チャート式解法と演習数学Ⅰ＋Ａ』数研出版株式会社