# 2定点を見込む角の最大値に関する指導法の研究

愛媛県立大洲高等学校　井上　晋二

## 1　はじめに

　現在、主に本校２年生の数学を担当している。２年生用に何かよい題材はないかと考えていた折、昨年度「第１回愛媛大学附属高等学校数学科教育研究会」に参加していたことを思い出した。その会で得たことをふまえて、今回の主題について考察したいと思い本主題を設定した。

## 2　研究動機

　「第１回　愛媛大学附属高等学校数学科教育研究会」では、「２定点を見込む角の最大値に関する問題」を生徒が取り組みやすいように、サッカーのシュートに例えていた。主に作図を通して活用力の育成を促していくという内容であった。その中で、「方べきの定理」を用いて点を作図するという内容があったが、時間の都合もあり詳しい説明はされなかった。そこで、「方べきの定理」に関する資料を探すことにし、河野(2000)では、同じような内容で中学生に対しての説明がされていた。そこで、高校生に対する内容を作ってみようと考え、今回の研究に至った。

　さて、高校では「図形と方程式」において、点の座標を求める問題があり、「三角関数」では角度を扱う。そこで、２年生には点の座標と角度に関連した問題が取り組みやすいと考え、「指数関数」で減少関数を履修した後 、２年生用に作りかえた、問題１で考察することにした。

## 3　研究目標

・定理１と定理２を活用することができる。
・疑問点を自ら解消しようと行動できる。
・論理的に考察することができる。

## 4　研究課題

**問題１**
$x$ 軸上の２ 点 $\mathrm{A}(-4, 0)$, $\mathrm{B}(2, 0)$ と直線 $l: x+2y-4=0$ 上の動点Ｐを考える。このとき、∠APB が最大となる点Ｐの座標を求めよ。

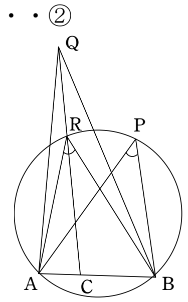
## 5　研究内容

### （１）　導入

**定理１**　柳川(2004, p.187)
円の周上に３点Ａ、Ｂ、Ｐがあり、点Ｑが直線ABに関して点Ｐと同じ側にあるとき、点Ｑが円の外部にあるならば次が成り立つ。

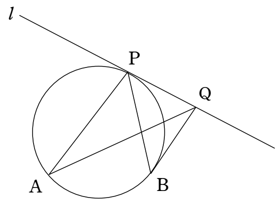
$$\angle \mathrm{AQB} < \angle \mathrm{APB}$$

**証明**
弦AB上に点Ｃをとり、QCと$\overset{\frown}{\mathrm{APB}}$ の交点をＲとする。
△AQRにおいて　∠AQR ＜ ∠ARC　・・・①
△BQRにおいて　∠BQR ＜ ∠BRC　・・・②
①＋②から
　　∠AQR＋∠BQR ＜ ∠ARC＋∠BRC
よって　　∠AQB ＜ ∠ARB
ここで、∠ARB＝∠APB であるから
　　∠AQB ＜ ∠APB　　　□




**例１**　河野(2000, p.25 改)
直線 $l$ と $l$ 上にない２定点Ａ、Ｂがあるとき、$l$ 上の点Ｐで ∠APB が最大となる点が存在する。この点Ｐは、２点Ａ、Ｂを通り、直線 $l$ に接する円と直線 $l$ の接点である。ただし、直線 $l$ と点Ｐは２定点Ａ､Ｂより上にあるとする。

**解答**
定理１により、
点Ｐの位置は、
点Ａ、Ｂを通り直線 $l$ に接する円と、
直線 $l$ との接点である。




**定理２　方べきの定理**　岩瀬(2011, p.170)
円外の点Ｎから引いた接線をNP、割線をNABとすると

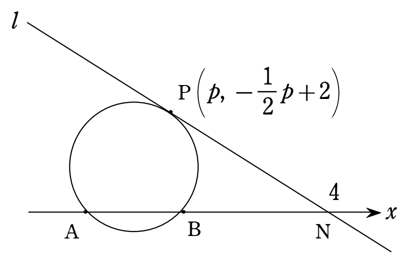
$$\mathrm{NP}^2 = \mathrm{NA}\cdot\mathrm{NB}$$

逆も成り立つ。

**定義１　減少関数**　岩瀬(2011, p.278)
関数 $f(x)$ について、ある区間の任意の $x_1, x_2$ に対して
　　$x_1 < x_2$　のとき　$f(x_1) > f(x_2)$
ならば、$f(x)$ はこの区間で減少するという。

### （２）　問題１の解説

（前半）例１により、∠APB が最大となるときの点Ｐの位置は、点Ａと点Ｂを通る円と直線 $l$ との接点となるときである。



動点 P $\left(p, -\frac{1}{2}p+2\right)$ とおく。
直線 $l$ と $x$ 軸との交点 N の座標は$(4, 0)$ である。
定理２により、

$$\begin{aligned}NP^2 &= NA \times NB\\ &= 8\times 2\\ &= 16 \quad \cdots①\end{aligned}$$

次に距離の公式から

$$\begin{aligned}NP^2 &= (p-4)^2+\left(-\frac{1}{2}p+2\right)^2\\ &= \frac{5}{4}p^2-10p+20 \quad \cdots②\end{aligned}$$

①、②より

$$\frac{5}{4}p^2-10p+20=16$$
$$5p^2-40p+16=0$$
$$p=\frac{20\pm\sqrt{20^2-5\cdot 16}}{5}=\frac{20\pm 8\sqrt{5}}{5}$$

これより、点 P の候補は２つでてくる。

$$\left(\frac{20-8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(\frac{20+8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

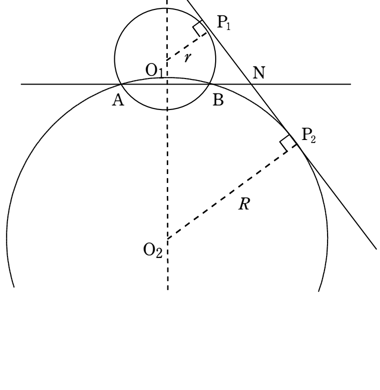
定理１の下線部に注意。点 P が直線 AB($x$ 軸) より上の場合と下の場合において、定理１をそれぞれ使えば、$p$ の解が２つでることがわかる.

（後半）次に、

$$P_1\left(\frac{20-8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right),\quad P_2\left(\frac{20+8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

とおき、$\angle AP_1B$ と$\angle AP_2B$ の大小関係を調べる。

点 A、B、$P_1$ を通る円の中心を $O_1$、半径を$r$ とする。点 A、B、$P_2$ を通る円の中心を $O_2$、半径を$R$ とする。また、直線 $O_1O_2$ と直線 $l$ との交点を M とする。直線 $O_1O_2$ は直線 $x=-1$ より、$M\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ である。また、$MP_1 < MP_2$ である。




$\triangle MO_1P_1$ と $\triangle MO_2P_2$ において、

$$\angle O_1MP_1 = \angle O_2MP_2$$
$$\angle MP_1O_1 = \angle MP_2O_2$$

より、対応する２組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle MO_1P_1 \backsim \triangle MO_2P_2$$

以上より

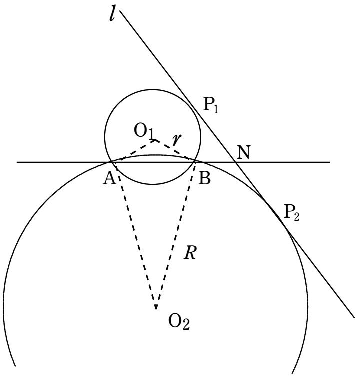
$$r<R$$

が成り立つ。

次に、$\angle AP_1B=\theta_1$，$\angle AP_2B=\theta_2$ とおく。
円周角の定理より、

$\angle AO_1B=2\theta_1\ (0^\circ<2\theta_1<180^\circ)$,
$\angle AO_2B=2\theta_2\ (0^\circ<2\theta_2<180^\circ)$

となる。




余弦定理と $r<R$ より

$$\begin{aligned}\cos 2\theta_1 &= \frac{r^2+r^2-AB^2}{2r^2}=1-\frac{AB^2}{2r^2}\\ &< 1-\frac{AB^2}{2R^2}=\frac{R^2+R^2-AB^2}{2R^2}=\cos 2\theta_2\end{aligned}$$

が成り立つ。

また、$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ において$\cos x$ は減少関数であるから、

$2\theta_2<2\theta_1$　つまり　$\theta_2<\theta_1$

よって、次が成り立つ。

$$\angle AP_2B < \angle AP_1B$$

以上より、$\angle APB$ を最大にする点 P の座標は点 $P_1$

$$\left(\frac{20-8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

□

## ６　考察

まず、定理１と例１については図を用いて説明した。そして､残りの導入を説明した後に問題１を解かせたところ、数名の生徒は直線$l$と接する円ではなく直線$l$と２点で交わる円を描いていた。さらに､「円上の点より円内の点の方が最大となるのではないか。しかし、一つに定まらない。」など、様々な疑問が沸き起こり悩んでいる様子であった。

しかし、生徒は間違えから考え、質疑応答を繰り返し、直線 $l$ と２点で交わる円ではいけないことがわかるように

なっていった。

この場所に思いのほか時間がかかったので、例１についてもう少し説明の工夫が必要であった。また、この部分だけでも十分な演習になると思えたので、前半だけに焦点を当てた授業でもよいと思えた。

時間の関係などもあり、前半部分ができれば十分な状況であった。前半まで正答できたのは若干名であり、後半については十分には取り組めていない様子であった。

## 7　まとめ

問題１の最大となる点は、定理１により例１が成り立つことから、円と直線 $l$ の接点とわかる。さらに、このことから定理２を用いれば点の座標が求まる。

当初は、後半始めの答えは１つなのに候補が２つ出ることに対して様々な解答方法を期待していたが、代わりに前半で生徒の考察が見られたのはよかった。また、問題１に「ただし、点 P の $y$ 座標は正の数とする。」などの条件を付け加えれば、生徒の負担も少なくてすむと思えた。後半については、意欲的な生徒に課題とするのがよいと思う。

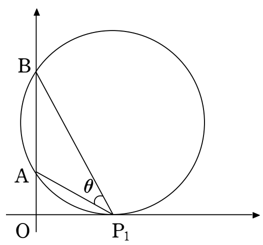
何故という気持ちを自ら解消しようとする行動が、意欲に繋がり向学心を高めると思うので、今後もこのような取組を続けていきたいと思う。

最後に方べきの定理が用いられる入試問題をあげておく。

$x$ 軸の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(t,0)\,(t>0)$ と 2 点 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(0,3)$ がある．
(3)　∠APB を最大にする点 P の座標を求めよ．

愛媛大学 [理•前] 2006

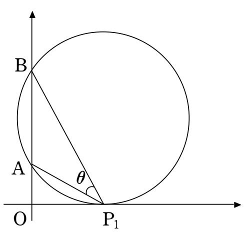
解答
(3)
2 点 A，B を通り，$x$ 軸の正の部分に接する右図のような円を考えると，∠APB=$\theta$ は点 P が円と $x$ 軸の接点 $\mathrm{P}_1$ にくるとき最大値 $\theta_1$ をとる．
方べきの定理より
$\mathrm{OP_1}^2=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$
$t^2=1\times3$
$t>0$ より　$t=\sqrt{3}$




$y$ 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(0,2)$ と $x$ 軸上の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(a,0)$ を考える．$\theta=$∠APB とおく．
(2)　$\theta$ が最大になる $a$ を求めよ．

北海道大学 [理•前] 2006

解答
(2)
2 点 A，B を通り，$x$ 軸の正の部分に接する右図のような円を考えると，$\theta$は点 P が円と $x$ 軸の接点 $\mathrm{P}_1$ にくるとき最大値 $\theta_1$ をとる．
方べきの定理より
$\mathrm{OP_1}^2=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$
$a^2=1\times2$
$t>0$より　$t=\sqrt{2}$



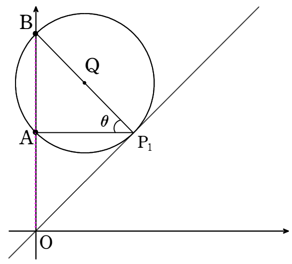

$x$ を正の実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{P}(x,x)$ をとり，△APB を考える．$x$ の値が変化するとき，∠APB の最大値を求めよ．

京都大学 [理•前] 2010

解答
2 点 A，B を通り，直線 $y=x$ の正の部分に接するような円を考えると，∠APB=$\theta$ は点 P が円と直線 $y=x$ の接点 $\mathrm{P}_1$ にくるとき最大値 $\theta_1$ をとる．

方べきの定理より
$\mathrm{OP_1}^2=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$
$(\sqrt{2}\,x)^2=1\times2$
$x>0$ より　$x=1$

よって，$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$




これより，
$\triangle\mathrm{ABP_1}$ は $\mathrm{AP_1}=1$，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BP_1}=\sqrt{2}$
となる ∠A=90° の直角三角形であるから
$\theta_1=45°$

## 8　参考文献


１．河野芳文(2000)『直線上の点から 2 定点を見込む角の最大値について』広島大学付属中高等学校研究紀要(第 47 号)
２．柳川高明(2004)『新課程 チャート式 数学 A』数研出版
３．岩瀬重雄(2011)『高校数学公式活用辞典』旺文社
４．教学社編集部(2006)『愛媛大学 2007 年版』教学社
５．教学社編集部(2006)『北海道大学 2007 年版』教学社
６．教学社編集部(2013)『京都大学 2014 年版』教学社