三角比の指導法の研究②

～ワークシートを利用した自学学習の研究～

愛媛県立八幡浜高等学校　　増田　稚子

1　はじめに

図形と計量では、図形の性質を学び、理解することが重要である。図形に関連した様々な計算を行うため、計算力も必要である。

前回の研究において、図形の見方や捉え方、解法の見通しなどを、生徒自身が考えられるようになることを目標の１つとし、生徒が自学自習できる学習教材を作成した。利用した生徒の感想から、家庭学習の質を高めることができ、有効的に利用できていたことが分かった。

図形の性質については､中学校で既習している内容と、高校で新しく学習する内容がある。数学Ａで平面図形を学習するが、進度等の関係で、図形と計量の分野を学習する際、平面図形をまだ履修していない場合もある。そこで、教科書や問題集等の問題を解くときの手助けとなるよう、図形と計量においてよく取り扱われている図形の性質についてまとめた補助教材を作成すると理解しやすくなるのではないかと考え、この主題を設定した。

2　研究の目標

(1) 平面図形の性質をまとめた補助教材を作成する。
(2) 授業の進度に応じて、補助教材を活用する。
(3) 授業で使用している補助教材の問題を用いて、ワークシートを作成する。
(4) 生徒の自学自習として利用させる。
(5) テストを行い、生徒の理解度を確認する。

3　研究の内容

(1)　平面図形の性質をまとめた補助教材を作成する

中学校で学んだ内容であっても、頻出内容を確認できるようにした。また、数学Ａの平面図形で学習する定理において、三角比の問題によく利用される内容についてまとめた。

(2)　授業の進度に応じて、補助教材を活用する

本校では、図形と計量を学習するときは、平面図形はまだ学習していないため、必要な内容はその都度、定理や性質を確認するようにしている。説明するとともに、すぐに確認できるよう、授業で活用する。

(3)　ワークシートを作成する

前回の研究に引き続いて、ワークシートを作成した。生徒からの感想でも、もっと多くの問題でワークシートを作成して欲しいという意見が多くあったため、空間図形などのイメージすることが難しい問題についてワークシートを作成した。

ワークシートの内容は次の通りである。

問題１問ごとに１枚のワークシートを作成した。内容は、＜考え方＞、＜解答の手順＞、＜解答＞、＜類題＞の４つである。

＜考え方＞は、問題の見通しや図形の捉え方をまとめたものである。このとき、図形の捉え方を変えることで式の立て方や使う公式が変わることに気付かせた

＜解答の手順＞は、解答の流れを簡単にまとめたものである。順を追って求めていくと答えに結びつくようにした。

＜解答＞は、＜解答の手順＞で示した流れを穴抜きの形で示したものである。手順と穴抜きで示した文章や式の前後から、求める値や公式を確認させた。

＜類題＞は、問題を理解したときの練習問題として、また、実力を付けたいときの問題として提示したものである。

(4)　生徒の自学自習として利用させる

生徒の自学自習を考えて作成したものであるため、生徒の理解度に応じて使用方法を変えることができるように工夫した。例えば、習熟度の高い生徒の場合、考え方は理解できており、逆に穴抜きの形の解答では考えづらいと感じるときもある。その場合は＜考え方＞を見て、自身の考え方が間違っていないかを確認し、＜類題＞を解くことで実力をつけることができる｡問題によっては､穴抜きの解答は使わずに、＜解答の手順＞を追って、自身で解答をしていくこともできる。

数学が苦手な生徒の場合、問題の見通しを理解することが重要である。まずは、＜考え方＞と＜解答の手順＞をしっかりと理解してから穴抜きを埋めていき、解くことができたという実感を身に付けさせる。何度か練習をして、手順を見ながら自身で解答することができるようになるためのモデルとすることもできる。

(5)　テストを行い、生徒の理解度を確認する

テストを実施し、生徒の理解度を確認する。また、生徒にワークシートについての感想を聞き、どのように利用したのか、参考になった点などを確認する。

4　研究の成果と今後の課題

今回の研究は、生徒が自主的に、効果的に自学学習が行えるように活用することを目的とした。平面図形の性質をまとめた補助教材は、図形と計量の問題でよく出題される内容をまとめ、その問題に対応できるように整理し、まとめた。図形は見方を変えることで容易に求めることができる問題もあるため、様々なものの見方を身に付けて欲しいと考えて作成した。

家庭学習を充実させるためには、生徒自身で考えることが大切である。分からない問題の解答をただ写すだけにならないようにするには、生徒が利用しやすいもの、利用したいと思えるものを提示することを考えた。

今後の課題は、生徒の実態に応じて内容を精選し、改善するとともに、ワークシートの種類を少しずつ増やしていくことである。生徒のつまずきやすい問題やイメージすることが難しい内容など、理解が深まる場合にはワークシートを作成し、活用していきたいと考えている。

＜参考文献＞

・『高等学校数学科用　数学Ⅰ』（数研出版）
・『高等学校数学科用　数学A』（数研出版）
・『新課程　教科書傍用　クリアー　数学Ⅰ＋A』（数研出版）
・『新課程　教科書傍用　３TRIAL　数学Ⅰ＋A』（数研出版）

＜平面図形の性質をまとめた補助教材の内容＞

平面図形の基本性質・重要定理

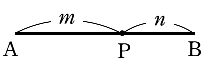
＜線分の内分･外分＞

m, n を正の数とする。

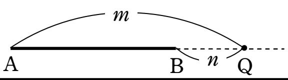
① 線分の内分
- 点Pが線分AB上にあって、AP:PB＝m:n が成り立つとき、点Pは線分ABの内分点という。

② 線分の外分
- 点Qが線分ABの延長上にあって、AQ:QB＝m:n が成り立つとき、点Qは線分ABの外分点という。

① 内分



② 外分 m＞nのとき



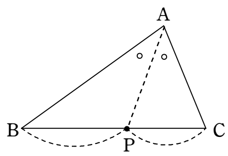
＜三角形の内角、外角の二等分線と比＞

① △ABCの∠Aの二等分線と辺BCとの交点Pは、辺BCをAB:ACに内分する。

② AB≒ACである△ABCの頂点Aにおける外角の二等分線と辺BCの延長との交点Qは、辺BCをAB:ACに外分する。

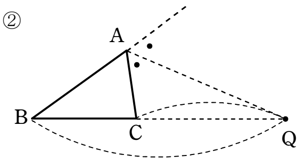
＊ 角の二等分線の性質であるため、内心に関係する問題にも利用される。

①



BP:PC＝AB:AC

②



BQ:CQ＝AB:AC

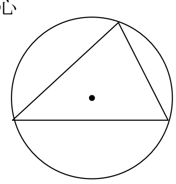
＜三角形の外心、内心、重心＞

① 外心
- 各辺の垂直二等分線の交点。
- 三角形の外接円の中心。

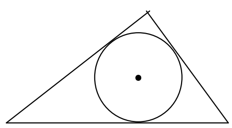
② 内心
- 各内角の二等分線の交点。
- 三角形の内接円の中心。

③ 重心
- ３つの中線の交点。
- 各中線は重心によって、2:1 に内分される。

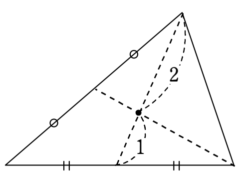
① 外心



② 内心

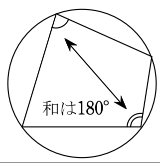


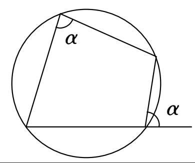
③ 重心



＜円に内接する四角形＞

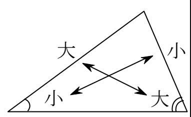
四角形が円に内接するとき、次のことが成り立つ。
- １組の向かい合う内角の和は180°。
- １つの内角は、それに向かい合う内角の外角に等しい。





＜三角形の辺と角＞

① 三角形の辺と角の大小関係
- 大きい辺に向かい合う角は、小さい辺に向かい合う角より大きい。
- 大きい角に向かい合う辺は、小さい角に向かい合う辺より大きい。



＊ 最大辺、最大角の問題に利用

＜ワークシートの内容・表＞

三角比の演習　No.6　　　教科書　数学Ⅰ　p.154　練習39　空間図形への応用

PA＝PB＝PC＝4，AB＝6，BC＝4，CA＝5 である三角錐 PABCの体積 V を求めよ。

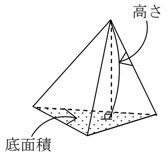
＜考え方＞

○　空間図形の問題は、平面図形（三角形）を取り出して考える。

○　三角錐の体積Vは、$V=\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)

どの三角形を底面として考えるかがPoint!

△ABCを底面とすると、PHが高さである。



○　△PAHは直角三角形である。

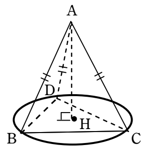
PA＝4 よりAHの長さが分かれば、三平方の定理から

PHの長さが求められる。

○　点Hは底面の外接円の中心である。

三角錐の性質

AB＝AC＝AD である三角錐ABCD において、頂点Aから底面BCDに垂線AHを下ろすと、Hは△BCD の外接円の中心となる。



AH は外接円の半径だから、正弦定理より$R=$AH を求める。

○　三角形の面積は　$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ を用いる。

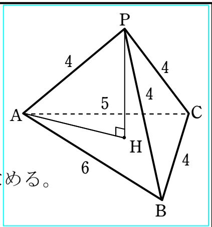
→　$\sin A$ の値が必要！

○　$\boxed{\text{3辺の長さ}}$ → $\boxed{\cos A}$ → $\boxed{\sin A}$　と計算できる。

余弦定理　　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

＜解答の手順＞

◎　図をかく。



①　余弦定理を用いて$\cos A$ の値を求める。

②　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より、$\sin A$ の値を求める。

③　三角形の面積 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ を求める。

④　正弦定理を用いて、外接円の半径を求める。

⑤　三平方の定理より、PHの長さを求める。

⑥　三角錐の体積　$V=\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)を求める

＜解答＞

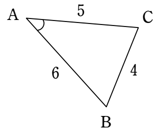
①　余弦定理を用いて$\cos A$ の値を求める。

△ABCにおいて、余弦定理より

$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$　だから

$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

$=\boxed{\quad}$



②　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より、$\sin A$ の値を求める。

$\cos A=\boxed{\quad}$、$\sin A>0$だから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\boxed{\quad}$

③　△ABCにおいて、三角形の面積を求める。

$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A$

$=\frac{1}{2}\cdot\boxed{\quad}\cdot\boxed{\quad}\cdot\boxed{\quad}$

$=\boxed{\quad}$

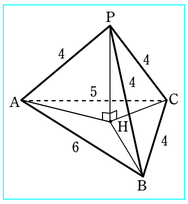
④　正弦定理を用いて、外接円の半径を求める。

頂点 P から底面 ABC に垂線 PH を下ろすと，△PAH，△PBH，△PCH はいずれも直角三角形で，

PA＝PB＝PC，　PH は共通

であるから，これらの直角三角形は合同である。

よって　　AH＝BH＝CH



△ABCにおいて、正弦定理より

$\frac{BC}{\sin A}=2R$　だから

$2R\cdot\sin A=BC$

代入して

$2R\cdot\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$

これを解いて

$R=\boxed{\quad}$

⑤　三平方の定理より、PHの長さを求める。

△PAHは直角三角形だから、三平方の定理を用いて

$AH=R=\boxed{\quad}$　より

$PH=\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$

⑥　三角錐の体積　$V=\frac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)を求める。

ゆえに，求める体積 V は

$V=\frac{1}{3}S\cdot PH=\boxed{\quad}$

$=\boxed{\quad}$　　　…（答）