微分方程式の指導法

愛媛県立宇和島東高等学校　井上栄治

1　はじめに

本年度４月より宇和島東高校に異動となった。５年ぶりの担任、しかも初めて理数科の担任を任されることとなり、私自身も改めて数学に対する感覚を研ぎ澄ませなければならないと感じていた。さらに、本年度は進路指導に関する学校訪問研修があり、数学の研究授業に加えて、ホームルーム活動で「なぜ、学ぶのか？」という難しいテーマで授業をすることになった。改めて数学を含めた学問に関して、私自身がその必要性や有用性を深く考える１年であった。

今回の研究は、昨年度までに掲載した内容をベースに数学Ⅲに関するエキスを少しだけ加えたものであり、研究と呼べる代物ではないことをあらかじめ承知いただきたい。

2　研究内容

本校が使っている数学Ⅲの教科書には、発展的な扱いとして「微分方程式」が掲載されている。微分方程式は、旧々課程の数学Ⅲからすでに学習指導要領の範囲外となった内容であるが、本校の生徒に対して考えると、高校の段階で微分方程式に触れておいていたほうがよいのではないかと考えた。

私自身も、工学部出身であり、微分方程式を学ぶ必要性を実感している。微分方程式は、自然現象や社会現象を数理的に表現し、研究するツールとして使われている。そこで、簡単な微分方程式の解法を学ぶだけでなく、ニュートンの運動方程式やマルサスの人口論などを紹介することで、その必要性や有用性について講義したいと常々思っていた。

今回は、３年生理系の生徒を対象に、微分方程式を教えた授業（２時間）を行ったので、その流れを簡単に紹介する。

１日目：

(1)　微分方程式の定義について教科書どおりに説明

(2)　微分方程式の解き方を紹介（教科書の例題）

（ア）　$\dfrac{dx}{dt} = a$　　　（イ）　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$

（ウ）　$\dfrac{dy}{dx} = ky$　　　（エ）　$\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{y}{x} = -1$

１日目は、教科書の例題を用いて、ある意味機械的に微分方程式の解法について習得させるだけにとどめた。

２日目：

(1)　宿題の解説

（ア）　$\dfrac{dx}{dt} = 0.5x$

（イ）　$\dfrac{dx}{dt} = ax(1-x)$

(2)　微分方程式の使用例を紹介

iPadを用いたプレゼン形式で、今回解いた微分方程式が、実は自然現象や社会現象に使われていることを教えて、その有用性を改めて実感させる。図１のスライドを用いて、例の１つである細菌の増殖について解説した。

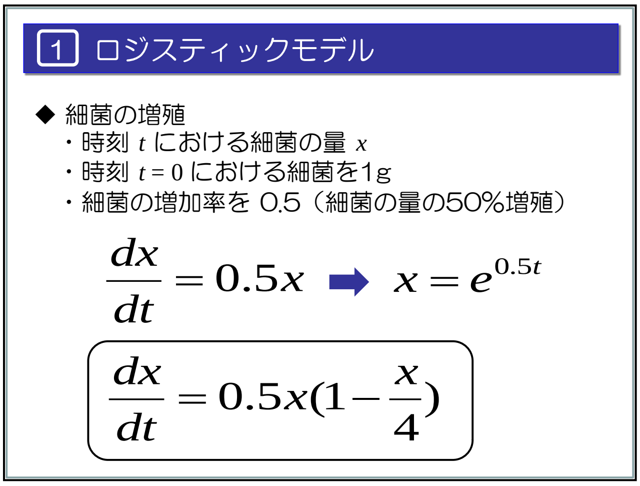


図１　ロジステックモデルの例

$x(t)$ は時刻 t における細菌の量を表しているとし、細菌の増加率を0.5（細菌の量の50%増殖）と仮定すると、$x(t)$ の増加分は微分で表され

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x$$

という微分方程式が得られる。時刻 $t=0$ における細菌の量を 1 g として、この微分方程式を解くと、

$$x = e^{0.5t}$$

となる。しかし、この解は何かおかしいことに気付かせる。指数関数なので、限りなく細菌が増加していく（グラフを板書）ことを意味しており、現実的ではないのである。ということは、微分方程式の立て方がまずかったわけで、修正をし

なければならない。増加率を一定としていたが、現実には環境条件もあって増加率は鈍化するはず。それを考慮に入れ、細菌の増加とともに、増加率が減少するような修正版の微分方程式として

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x(1 - \frac{x}{4})$$

を提示する。これは今回の宿題にしていた問題(イ)が近いことに気付かせる。また、その問題が「カオス」などの話でよく使用されるものであることも紹介する。

以上で、微分方程式の有用性についての一例であるが、時間があったので、さらに、連続性を持った微分方程式を差分化した次の方程式を紹介した。

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad \cdot \cdot \cdot \quad ①$$

ここからは、微分方程式からは脱線して話を進めた。

(3)　数学と音楽の話について説明

本校の理科教員に借りた機材を用いて、音声の周波数を波形に変換するソフトや、NHKのビデオを用いて、数学と音楽とのつながりについて実際の音を出して、楽しみながら説明した。

(4)　微分方程式から特許取得まで

(2)で紹介した方程式①を用いて、私自身が10年前に取得した特許について紹介した。①で作られる値をグラフ化すると図２のようになり、これを(3)で紹介したように音声にすると雑音になるはずである。それを通信に応用し、会社員時代に特許（図３）を取得することができた話をした。ちょうど本年度ノーベル物理学賞を受賞した中村教授の話を交えることで興味を引かせることができた。

以上のように、微分方程式の解き方を教えるだけでなく、微分方程式が自然現象の解明などに使われていることや、習った式を使って特許まで取得できたという話をすることで、将来日本を背負って立つ（？）本校理系の生徒に、少しでも数学の楽しさと有用性を感じ取ってもらえたのではないだろうか。

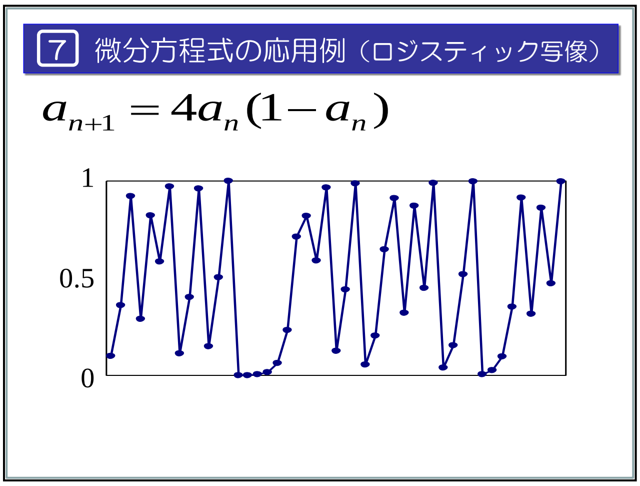
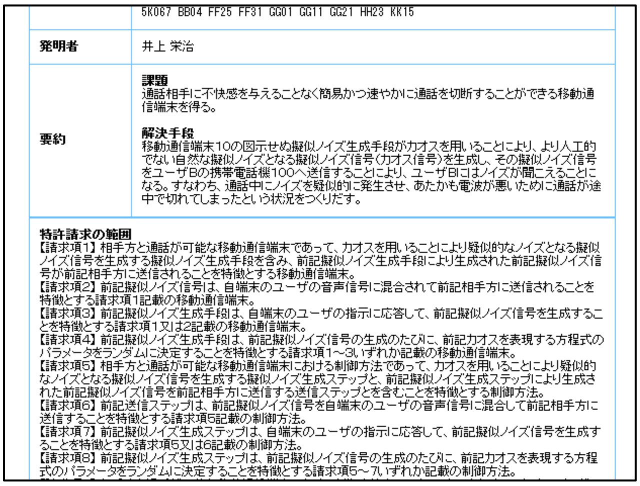


図２　応用例



	5K067 BB04 FF25 FF31 GG01 GG11 GG21 HH23 KK15
発明者	井上 栄治
要約	**課題** 通話相手に不快感を与えることなく簡易かつ速やかに通話を切断することができる移動通信端末を得る。 **解決手段** 移動通信端末10の図示せぬ擬似ノイズ生成手段がカオスを用いることにより、より人工的でない自然な擬似ノイズとなる擬似ノイズ信号(カオス信号)を生成し、その擬似ノイズ信号をユーザBの携帯電話機100へ送信することにより、ユーザBにはノイズが聞こえることになる。すなわち、通話中にノイズを疑似的に発生させ、あたかも電波が悪いために通話が途中で切れてしまったという状況をつくりだす。

特許請求の範囲
【請求項1】相手方と通話が可能な移動通信端末であって、カオスを用いることにより疑似的なノイズとなる擬似ノイズ信号を生成する擬似ノイズ生成手段を含み、前記擬似ノイズ生成手段により生成された前記擬似ノイズ信号が前記相手方に送信されることを特徴とする移動通信端末。
【請求項2】前記擬似ノイズ信号は、自端末のユーザの音声信号に混合されて前記相手方に送信されることを特徴とする請求項1記載の移動通信端末。
【請求項3】前記擬似ノイズ生成手段は、自端末のユーザの指示に応答して、前記擬似ノイズ信号を生成することを特徴とする請求項1又は2記載の移動通信端末。
【請求項4】前記擬似ノイズ生成手段は、前記擬似ノイズ信号の生成のたびに、前記カオスを表現する方程式のパラメータをランダムに決定することを特徴とする請求項1～3いずれか記載の移動通信端末。
【請求項5】相手方と通話が可能な移動通信端末における制御方法であって、カオスを用いることにより疑似的なノイズとなる擬似ノイズ信号を生成する擬似ノイズ生成ステップと、前記擬似ノイズ生成ステップにより生成された前記擬似ノイズ信号を前記相手方に送信する送信ステップとを含むことを特徴とする制御方法。
【請求項6】前記送信ステップは、前記擬似ノイズ信号を自端末のユーザの音声信号に混合して前記相手方に送信することを特徴とする請求項5記載の制御方法。
【請求項7】前記擬似ノイズ生成ステップは、自端末のユーザの指示に応答して、前記擬似ノイズ信号を生成することを特徴とする請求項5又は6記載の制御方法。
【請求項8】前記擬似ノイズ生成ステップは、前記擬似ノイズ信号の生成のたびに、前記カオスを表現する方程式のパラメータをランダムに決定することを特徴とする請求項5～7いずれか記載の制御方法。

図３　特許（patentjp.comより）

3　まとめ

微分方程式は、高校の数学から除外されているが、その有用性を考えると、少しでも高校時代に触れておくことが良いのではないかと考え、今回のテーマにあげた。実例等を用いることで生徒の興味関心を強めることができたのではないかと考えている。

また、微分方程式に限らず、今後も数学が数楽になるよう数学の必要性、有用性、楽しさなどを生徒に伝えることができるよう日々研鑽を深めていきたい。

参考資料：

[1]　特許紹介 HP：patentjp.com
http://www.patentjp.com/15/T/T100008/DA10127.html

[2]　「意味がわかれば数学の風景がみえてくる」
野崎昭弘・何森仁・伊藤潤一・小沢健一　著(ベレ出版)