定積分に関する指導法の研究

愛媛県立松山工業高等学校　末光　忍

1　はじめに

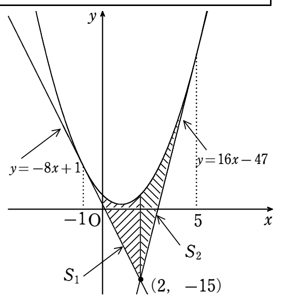
私は３年生の選択科目「数学研究」を担当している。数学研究では、数学Ⅲのうち極限・微分・積分の基本的な計算と、三角関数・指数関数・対数関数・微分積分など、主に数学Ⅱを中心とした内容を学習している。

定積分の計算に限らず、生徒の計算力が不足していると感じることがある。問題を繰り返し解いて計算力を付けさせることが重要であると考えるが、何らかの工夫をして計算ができる場合は、その方法を説明するようにしている。今回の内容は、数学Ⅱの定積分を用いて面積を求める問題を学習している中で、生徒の疑問点に対する説明内容をまとめたものである。

2　授業の内容

(1)　放物線と２本の接線とで囲まれた図形の面積

> 例１　放物線 $y=2x^2-4x+3$ に点(2，－15)から２本の接線を引くとき、この放物線と２本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。
>
> 『数研出版　トライＥＸ』より



ア　生徒の計算方法

$$S=\int_{-1}^{2}\{(2x^2-4x+3)-(-8x+1)\}dx+\int_{2}^{5}\{(2x^2-4x+3)-(16x-47)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(2x^2+4x+2)dx+\int_{2}^{5}(2x^2-20x+50)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+4\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{2}{3}x^3-20\cdot\frac{x^2}{2}+50x\right]_{2}^{5}\ \cdots ①$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot 2^3+2\cdot 2^2+2\cdot 2\right)-\left\{\frac{2}{3}\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\right\}$$

$$+\left(\frac{2}{3}\cdot 5^3-10\cdot 5^2+50\cdot 5\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 2^3-10\cdot 2^2+50\cdot 2\right)$$

$$=36$$

例１の問題を解くとき、定積分の計算①で間違えるという計算ミスがあり、次の不定積分②を用いて計算できることを説明した。

$$\int(x+a)^n dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C\ （\text{Cは積分定数}）\cdots ②$$

この不定積分については、まだ学習していなかったが、合成関数の微分法は学習していたので問題なく使うことができた。

イ　不定積分②を用いての計算方法

$$S=\int_{-1}^{2}\{(2x^2-4x+3)-(-8x+1)\}dx+\int_{2}^{5}\{(2x^2-4x+3)-(16x-47)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(2x^2+4x+2)dx+\int_{2}^{5}(2x^2-20x+50)dx$$

$$=2\int_{-1}^{2}(x+1)^2dx+2\int_{2}^{5}(x-5)^2dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{2}+2\left[\frac{1}{3}(x-5)^3\right]_{2}^{5}$$

$$=\frac{2}{3}(3^3-0)+\frac{2}{3}\{0-(-3)^3\}$$

$$=18+18$$

$$=36$$

②の式を用いて例１の類題を２、３問解くと、生徒から

「この問題では必ず②の式が使えるのか。」

「S_1 と S_2 は、いつも同じ面積になるのか。」

という疑問点が出てきた。

(2)　放物線と２本の接線とで囲まれた部分の面積

放物線 $f(x)=ax^2+bx+c$ 上の点A$(\alpha,\ f(\alpha))$，B$(\beta,\ f(\beta))$ における接線と放物線で囲まれた部分の面積Ｓを求める。ただし、$a>0$，$\alpha<\beta$ とする。

$f'(x)=2ax+b$

点Aにおける接線の方程式は

$y-f(\alpha)=(2a\alpha+b)(x-\alpha)$

$y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c\quad\cdots ③$

点Bにおける接線の方程式も同様に

$y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\quad\cdots ④$

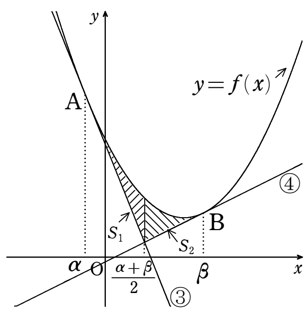
③，④の交点の x 座標は

$(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$

$2a(\alpha-\beta)x=a(\alpha^2-\beta^2)$

$a\neq 0$，$\alpha\neq\beta$ より

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$



$S=S_1+S_2$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left[ax^2+bx+c-\{(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c\}\right]dx$$

$$+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left[ax^2+bx+c-\{(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\}\right]dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}a(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}a(x-\beta)^2dx \quad \cdots (※)$$

$$=a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{a}{3}\left\{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-0\right\}+\frac{a}{3}\left\{0-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

以上のように、放物線と２本の接線とで囲まれた部分の面積を求めた。この計算から、以下のことが確認できた。

・(※) のように変形できるので、不定積分②を用いて計算できる。
・S_1 と S_2 は等しい。
・上端、下端を代入すると一方が０になるので計算しやすい。

(3)　２つの放物線とその共通接線とで囲まれた部分の面積

> 例２　放物線 $y=x^2-5x+6$ と $y=x^2+3x-2$ が直線 $y=x-3$ に接しているとき、２つの放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。
>
> 『ラーンズ　重要問題演習』より

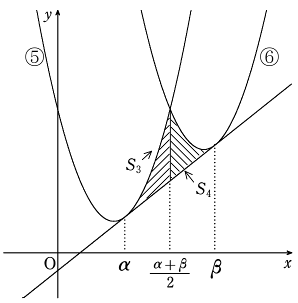
例２の問題も例１と同様に、不定積分②を用いて計算できることを説明した。

2つの放物線 $y=ax^2+bx+c$ …⑤

$y=ax^2+dx+e$ …⑥

と、その共通接線 $y=mx+n$ とで囲まれた部分の面積Ｓを求める。ただし、$a>0$ とする。

⑤、⑥と共通接線との接点の x 座標をそれぞれ α、β とおく。 $(\alpha<\beta)$



接するので、

$ax^2+bx+c-(mx+n)=a(x-\alpha)^2$ より

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+(mx+n)$

同様にして

$ax^2+dx+e=a(x-\beta)^2+(mx+n)$

⑤と⑥の交点の x 座標は

$ax^2+bx+c=ax^2+dx+e$

$a(x-\alpha)^2+(mx+n)=a(x-\beta)^2+(mx+n)$

$a\{(x-\alpha)^2-(x-\beta)^2\}=0$

$a\{(x-\alpha)+(x-\beta)\}\{(x-\alpha)-(x-\beta)\}=0$

$a\{2x-(\alpha+\beta)\}(\beta-\alpha)=0$

$a\fallingdotseq 0$, $\alpha\fallingdotseq\beta$ より

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$S=S_3+S_4$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}dx$$

$$+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{(ax^2+dx+e)-(mx+n)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}a(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}a(x-\beta)^2dx$$

$$=a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{a}{3}\left\{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-0\right\}+\frac{a}{3}\left\{0-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

３　まとめ

今回の授業の中では、生徒は面積を求める計算で不定積分②の式が使えることを理解し、計算で活用できた。しかし、普段の生徒の現状としては、教科書にあるような基本的な定積分の性質も使えず、何の工夫もなく計算して間違えることが多い。演習量が不足していることが一番の原因だと考えられる。今後は、様々な性質を用いることができるとともに、計算力が向上するように、授業での演習だけでなく家庭学習をしっかりと行うことのできる課題の内容を検討したい。

今回、何も研究することができず、授業内容の報告だけになり申し訳ありません。今後は、様々な分野において、生徒が間違えやすいところに注目し、よりよい指導方法を考えていきたいと思う。

参考文献

『Focus Gold　数学Ⅱ＋Ｂ　新課程用』　（啓林館）