三角比に関する指導法の研究

愛媛県立松山工業高等学校　　末光　忍

１　はじめに

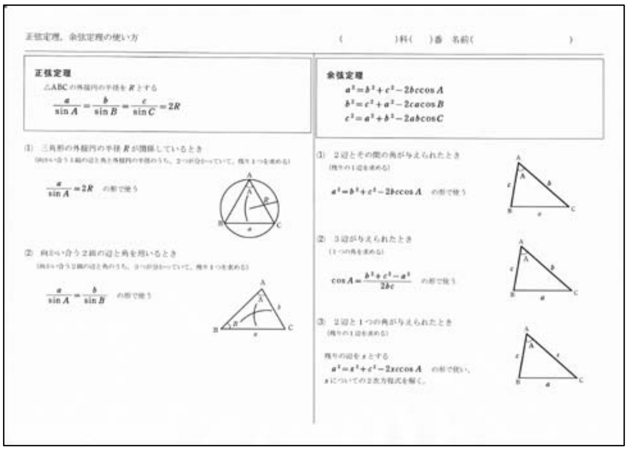
数学Ⅰの三角比の単元において、三角形の決定の問題を解く際に、正弦定理・余弦定理のどちらを用いても求められる場合がある。本校が使っている数研出版（新編）の教科書では、「２辺とその間の角」の条件から残りの辺を求めた後、余弦定理で角を求めている。この解法は計算が大変になるため、計算間違いが多い。正弦定理を使うと計算が簡単になるため、解ける生徒が多くなるが、問題によっては２つ求まる角から１つに絞るのが難しい場合もある。

今回の研究は、三角形の決定の問題で正弦定理・余弦定理をどのように使うべきか、生徒に考えて問題を解かせることを目標に取り組んだ実践報告である。「２辺とその間の角」以外の条件が与えられた場合の正弦定理・余弦定理の使い方も確認した。

２　指導内容

(1)　正弦定理・余弦定理の使い方について確認する。

正弦定理・余弦定理を用いる教科書の基本問題を学習した後、それぞれの定理を使う条件についてプリントにまとめて確認した。



(2)　練習問題を解く。

ア　「２辺とその間の角」のとき

問１　△ABCにおいて，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=135°$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

イ　「２辺と１つの角」のとき

問２　△ABCにおいて，$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

ウ　「１辺と２つの角」のとき

問３　△ABCにおいて，$b=3$，$A=45°$，$B=60°$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

エ　「３辺」のとき

問４　△ABCにおいて，$a=1+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(3)　「２辺とその間の角」の解答について

問１　△ABCにおいて，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-1$，$C=135°$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

（角を余弦定理で求める解答）

余弦定理より

$$c^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\cos 135°=4$$

$c>0$ より　$c=2$

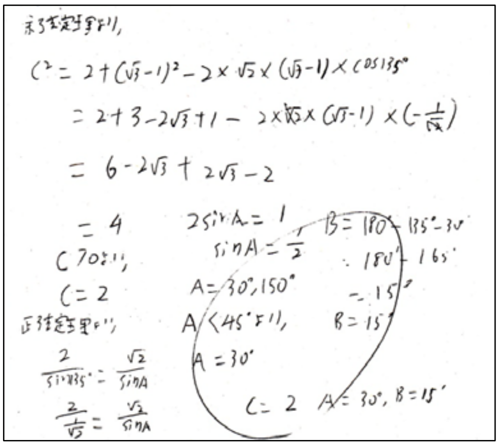
余弦定理により

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A=30°$

したがって　$B=180°-(135°+30°)=15°$

（定期考査での生徒の解答）



問１について角を余弦定理で求める解答では、多くの生徒が計算を間違えて求められなかった。角を求める段階では、条件から正弦定理を用いて解くこともでき、計算が簡単になる。角が２つ求まるが、三角形の内角の和が 180°であることから、簡単に１つに絞ることができる。このように、正弦定理・余弦定理のどちらでも使える場面があることを確認させた。

定期考査では、余弦定理を用いた生徒は計算間違いが多かったが、正弦定理を用いた場合は角を求めることができた生徒が多かった。

類題１　△ABCにおいて，$b=\sqrt{3}-1$，$c=2$，$A=30°$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理より

$$a=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot2\cdot\cos30°=2$$

$a>0$ より　　$a=\sqrt{2}$

正弦定理より

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin30°}=\frac{2}{\sin C}$$

$$\sin C=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

c が最大辺より，C は最大角となるので

$C=135°$

したがって　　$B=180°-(30°+135°)=15°$

類題１について、正弦定理で角を求めると、三角形の内角の和の条件では１つに絞ることができない問題を考えさせた。このような場合、まだ未習である「三角形の辺と角の関係」を用いる必要があり、難しい。

以上のように正弦定理・余弦定理のどちらを用いてもメリットとデメリットがある。余弦定理は確実に答えが１つ求まるメリットがあり、計算力があれば余弦定理の方がよいが、計算力がないと間違えることが多い。正弦定理は簡単に計算できるメリットがあるが、角が２つ求まるので１つに絞る必要があり、それが難しい場合もある。

問１のように「与えられた角が鈍角か 60°であれば、正弦定理で求めても三角形の内角の和から簡単に１つの答えに絞ることができる」ことを確認した。

(4)　「１辺と２つの角」の解答について

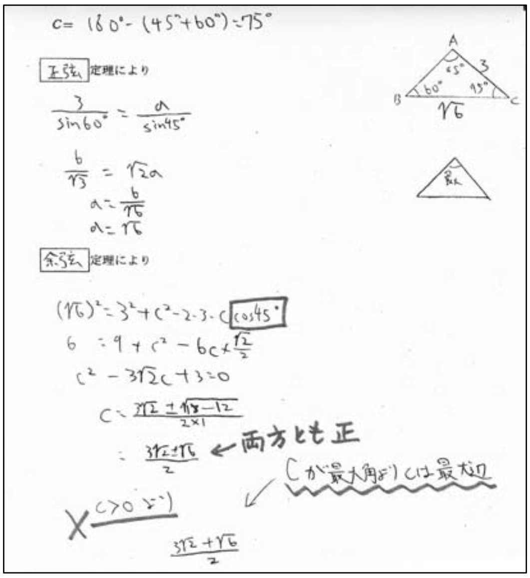
問３　△ABCにおいて，$b=3$，$A=45°$，$B=60°$のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

「１辺と２つの角」の条件の場合、３つ目の辺を求めるとき、余弦定理の使い方が 2 通りある。解法１のように cos45°を用いる方法と、解法２のように cos60°を用いる方法である。解法１では解の公式で求めた２つの解がともに正であるため、三角形の辺と角の関係から 1 つに絞る必要があり、難しい。解法２では求めた２つの解が正と負であるため、辺の長さは正であるという簡単な理由で１つに絞ることができる。

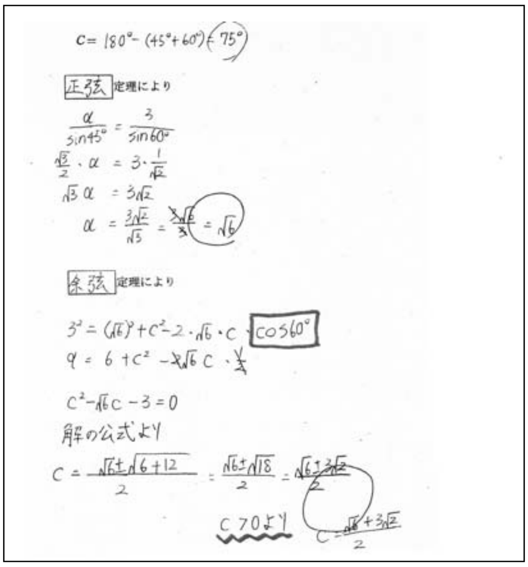
生徒の解答は解法１と２が同じぐらいあり、解法１では、三角形の辺と角の関係から 1 つに絞ることができている生徒はいなかった。多かった答えは、２つとも正であるのに「c ＞0 」という理由で 1 つに絞っている場合や、２つとも答えにしてしまった場合であった。それに対して、解法２で解いた生徒の多くは、「c ＞0 」という理由から答えを１つに絞ることができていた。

この問題のように余弦定理の使い方が２通りある場合には、解法２のように「角の大きい方を用いて余弦定理を使うと、辺の長さは正という簡単な理由で解を１つに絞ることができる」ことを説明した。

（解法１）cos45°を用いる方法



（解法２）cos60°を用いる方法



３　まとめ

今回、正弦定理・余弦定理をどのように使うべきか、考えさせた。しかし、計算力がないために本題に入る前に計算ミスをしたりする生徒もいた。今後は、基礎・基本を定着させるための課題の与え方や、考える力を身に付けることのできる授業の在り方を考えていきたいと思う。

参考文献・引用文献

数研出版編集部『３TRIAL 数学Ⅰ』数研出版株式会社

啓林館編集部『FocusＺ　数学Ⅰ＋Ａ』株式会社新興出版社啓林館

愛媛県総合教育センター『知的好奇心をくすぐる教材・教具 14』http://www.esnet.ed.jp/center/main/(2015.11.18)